МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНИЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРОВЕДЕННЯ

практичних занять з вищої математики за темою

«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

для викладачів та студентів усіх спеціальностей

Затверджено
редакційною-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 30.01.18

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

Методичні рекомендації до проведення практичних занять за темою «Невизначений інтеграл» для викладачів та студентів усіх спеціальностей / уклад. Н.В Черемська, Т.Т. Черногор. – Харків.: НТУ «ХПІ», 2018. – 71 с.

Укладачі: Н.В Черемська, Т. Т. Черногор

Рецензент Н.О. Чікіна, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Кафедра вищої математики

ЗМІСТ

Вступ

Методичні рекомендації розроблені як продовження серії «Практичні заняття з вищої математики» та призначені для молодих викладачів та студентів, у тому числі тих, що навчаються за особистим навчальним планом. Методичні рекомендації до проведення практичних занять з теми «Невизначений інтеграл» складаються з 6 практичних занять та охоплюють навчальну програму з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей.

Кожне практичне заняття починається з контрольних питань, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. Далі, згідно з даною темою, наведені приклади з детальними поясненнями, а також приклади для аудиторної та самостійної роботи, до яких додаються відповіді.

Після кожного практичного заняття подано список літератури, яка рекомендована до самостійного ознайомлення. До цього списку увійшли як традиційні класичні підручники, так і навчально-методичні видання кафедри. Завершуються методичні вказівки варіантами контрольної роботи.

Практичне заняття 1

ТАБЛИЧНІ ІНТЕГРАЛИ.
ІНВАРІАНТНІСТЬ ФОРМУЛ ІНТЕГРУВАННЯ

Контрольні питання

1. Поняття первісної, означення невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Табличні інтеграли.

2. Теорема про інваріантність формул інтегрування.

3. Теорема про заміну змінної у невизначеному інтегралі.

1. Як відомо, основною задачею диференціального числення є знаходження похідної заданої функції. Основним завданням інтегрального числення є задача обернена – за відомою заданою похідною знайти саму функцію.

Згідно з теоретичним матеріалом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ , де } F'(x) = f(x) .$$

Розглянемо табличний інтеграл $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$,

та знайдемо:

1.1. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$; **1.2.** $\int x^8 dx = \frac{x^9}{9} + C$; **1.3.** $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C$;

1.4. $\int \frac{dx}{x^9} = \int x^{-9} dx = \frac{x^{-8}}{-8} + C$; **1.5.** $\int \sqrt[3]{x^4} dx = \int x^{4/3} dx = \frac{3x^{7/3}}{7} + C$;

1.6. $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{2/5} dx = \frac{5x^{7/5}}{7} + C$; **1.7.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^7}} = \int x^{-7/4} dx = -\frac{4x^{-3/4}}{3} + C$;

1.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[11]{x^8}} = \int x^{-8/11} dx = \frac{11x^{3/11}}{3} + C$.

Враховуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла

$$\int\left[\alpha f(x)\pm\beta\varphi(x)\right]dx=\alpha\int f(x)dx\pm\beta\int\varphi(x)dx,$$

знайдемо:

1.9. $\int(3x^4-7x^2+5)dx=\dfrac{3x^5}{5}-\dfrac{7x^3}{3}+5x+C$;

1.10. $\int\left(\dfrac{13}{x^7}+4x^3-\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(13x^{-7}+4x^3-5x^{-1/2}\right)dx=$

$=\dfrac{13x^{-6}}{-6}+x^4-10x^{1/2}+C$;

1.11. $\int\dfrac{2+3\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}dx=\int\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}dx+\int\dfrac{3\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx+\int\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}dx=$

$=2\int x^{-\frac{3}{2}}dx+3\int x^{\frac{2}{5}-\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}}dx=2\int x^{-\frac{3}{2}}dx+3\int x^{-\frac{11}{10}}dx+$

$+\int x^{-\frac{5}{4}}dx=2\left(-2\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+3\left(-10\dfrac{1}{\sqrt[10]{x}}\right)-4\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+C$;

1.12. $\int\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\dfrac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$

$=\int x^{-\frac{1}{3}}dx+2\int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}dx+\int x^{1-\frac{1}{3}}dx=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{12}{7}\sqrt[6]{x^7}+\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$.

Використовуючи теорему: якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то

$\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$, знайдемо:

1.13. $\int e^{3x+5}\,dx=\dfrac{1}{3}e^{3x+5}+C$; **1.14.** $\int 3^{7-8x}\,dx=-\dfrac{1}{8\ln 3}3^{7-8x}+C$;

1.15. $\int\sin(5x-9)\,dx=-\dfrac{1}{5}\cos(5x-9)+C$; **1.16.** $\int\dfrac{dx}{3-2x}=-\dfrac{1}{2}\ln|3-2x|+C$;

1.17. $\int \frac{dx}{4x^2+7} = \int \frac{dx}{(2x)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}} + C$;

1.18. $\int \frac{dx}{3x^2-16} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x\right)^2-4^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}\right| + C$;

1.19. $\int \frac{dx}{\cos^2(5-3x)} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(5-3x) + C$.

2. З курсу диференціального числення відомо, що для функції $y = y(x)$ диференціал має вигляд $dy = y'(x)dx$. Говорять, що множник $y'(x)$ підведено під знак диференціала, якщо $y'(x)dx = dy$. Наприклад:

$\cos x dx = d(\sin x)$, $-\sin x dx = d(\cos x)$, $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x)$,

$-\frac{1}{\sin^2 x}dx = d(\operatorname{ctg} x)$, $e^x dx = d(e^x+7)$, $\frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)$,

$12x^2dx = d(4x^3+1)$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = d(\sqrt{x})$, $-\frac{dx}{x^2} = d\left(\frac{1}{x}\right)$ і т.д.

Якщо інтеграл не можна обчислити безпосередньо, то підведенням під знак диференціала в багатьох випадках можна спростити підінтегральний вираз. Використовується інваріантність формул інтегрування $\int f(u)du = F(u) + C$, де u – незалежна змінна або будь-яка функція, яка диференційована за незалежною змінною x.

Розглянемо приклади.

2.1. $\int (3x+7)^5 d(3x+7) = \frac{(3x+7)^6}{6} + C$;

2.2. $\int (4x+5)^3 dx = \frac{1}{4}\int (4x+5)^3 4dx = \frac{1}{4}\int (4x+5)^3 d(4x+5) =$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+5)^4}{4}+C=\frac{(4x+5)^4}{16}+C;$$

2.3. $\int \sin^5 x\cos x\,dx=\int(\sin x)^5\,d(\sin x)=\frac{(\sin x)^6}{6}+C$;

2.4. $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;

2.5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\arcsin\left(x^3\right)+C$.

Підведення під знак диференціала вимагає певних навичок. На практиці не завжди легко визначити, яку саме функцію вносити під знак диференціала, особливо, якщо підінтегральний вираз доволі складний.

3. Ефективним методом інтегрування є метод заміни змінної інтегрування. Цей метод є рівноправним з підведенням під знак диференціала. Якщо підінтегральний вираз доволі складний або студенту недостатньо досвіду, який накопичується поступово, тоді звертаються до заміни змінної.

Для знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ можна замінити змінну x новою змінною t, яка зв'язана з x відповідною формулою $x=\varphi(t)$. Визначивши з цієї формули диференціал $dx=\varphi'(t)dt$, та підставляючи його до інтеграла, отримуємо $\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int\Phi(t)dt$.

Мета цього методу полягає в отриманні більш простого інтеграла, тобто табличного або такого, спосіб обчислення якого є відомим. Вибір вдалої формули для заміни змінної має велике значення. Але порадити одне загальне правило для вибору вдалої підстановки неможливо. Вміння обрати функцію $x=\varphi(t)$ так, щоб обчислення інтеграла спростилось, досягається великою кількістю вправ.

Розглянемо декілька прикладів, які призначаються для набуття навичок у застосуванні методу заміни змінної.

3.1. $\int \frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \arcsin x, \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\arcsin^4 x}{4} + C$;

3.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^5 x}}{x} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int \sqrt[3]{t^5} dt = \int t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{3}{8} t^{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\ln^8 x} + C$;

3.3. $\int \frac{xdx}{4x^2+5} = \left\| \begin{array}{l} t = 4x^2+5, \\ dt = 8xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8} \ln|t| + C = \frac{1}{8} \ln\left(4x^2+5\right) + C$;

3.4. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{5-\cos^2 x}} = \left\| \begin{array}{l} t = 5-\cos^2 x, \\ dt = -2\cos x\left(-\sin x\right)dx = \sin 2x\,dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$

$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{5-\cos^2 x} + C;$

3.5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C;$

3.6. $\int \operatorname{tg}\left(3x+5\right)dx = \int \frac{\sin\left(3x+5\right)}{\cos\left(3x+5\right)} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \cos\left(3x+5\right), \\ dt = -3\sin\left(3x+5\right)dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} =$

$= -\frac{1}{3} \ln|t| + C = -\frac{1}{3} \ln\left|\cos\left(3x+5\right)\right| + C;$

3.7. $\int x^2 e^{3-7x^3} dx = \left\| \begin{array}{l} t = 3-7x^3, \\ dt = -21x^2 dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{21} \int e^t dt = -\frac{1}{21} e^{3-7x^3} + C$;

3.8. $\int \sin 2x \cdot e^{5\cos 2x-4} dx = \left\| \begin{array}{l} t = 5\cos 2x - 4, \\ dt = -10\sin 2x dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{10} \int e^t dt = -\frac{1}{10} e^{5\cos 2x-4} + C;$

3.9. $\int \frac{7^{\operatorname{arctg} 2x+5} dx}{1+4x^2} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} 2x+5, \\ dt = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int 7^t dt = \frac{7^t}{2\ln 7} + C = \frac{7^{\operatorname{arctg} 2x+5}}{2\ln 7} + C$;

3.10. $\int x^3 2^{9-5x^4}\,dx = \left\| \begin{matrix} t = 9-5x^4, \\ dt = -20x^3 dx \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{20}\int 2^t\,dt = -\frac{1}{20}\cdot\frac{2^t}{\ln 2} + C = -\frac{1}{20}\cdot\frac{2^{9-5x^4}}{\ln 2} + C;$

3.11. $\int \frac{\cos\sqrt{9x-1}\,dx}{\sqrt{9x-1}} = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{9x-1}, \\ dt = \dfrac{9dx}{2\sqrt{9x-1}} \end{matrix} \right\| = \frac{2}{9}\int \cos t\,dt = \frac{2}{9}\sin t + C = \frac{2}{9}\sin\sqrt{9x-1} + C\,;$

3.12.

$\int x\sin\left(3x^2-1\right)dx = \left\| \begin{matrix} t = 3x^2-1, \\ dt = 6xdx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{6}\cos t + C = -\frac{1}{6}\cos\left(3x^2-1\right) + C;$

3.13. $\int e^x\cos\left(5e^x-4\right)dx = \left\| \begin{matrix} t = 5e^x-4, \\ dt = 5e^x dx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}\int \cos t\,dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin\left(5e^x-4\right) + C\,;$

3.14. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \left\| \begin{matrix} t = \ln x, \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}\left(\ln x\right) + C;$

3.15.

$\int \frac{dx}{1-\cos 5x} = \int \frac{dt}{2\sin^2\frac{5x}{2}} = \left\| \begin{matrix} t = \dfrac{5x}{2}, \\ dt = \dfrac{5}{2}dx \end{matrix} \right\| = \frac{2}{2\cdot 5}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}\frac{5x}{2} + C;$

3.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}\cos^2\sqrt{1-3x}} = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{1-3x}, \\ dt = \dfrac{-3dx}{2\sqrt{1-3x}} \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{2}{3}\operatorname{tg} t + C =$

$= -\frac{2}{3}\operatorname{tg}\sqrt{1-3x} + C;$

3.17. $\int \frac{\cos x\,dx}{16\sin^2 x + 25} = \int \frac{\cos x\,dx}{\left(4\sin x\right)^2 + 5^2} = \left\| \begin{matrix} t = 4\sin x, \\ dt = 4\cos x\,dx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+5^2} =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C = \frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{5} + C\,;$

3.18.

$$\int\frac{e^x dx}{5e^{2x}-4}=\int\frac{e^x dx}{\left(\sqrt{5}e^x\right)^2-2^2}=\left\|\begin{array}{l} t=\sqrt{5}e^x, \\ dt=\sqrt{5}e^x dx \end{array}\right\|=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{t^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}e^x-2}{\sqrt{5}e^x+2}\right|+C;$$

3.19.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{9-4\ln^2 x}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{3^2-(2\ln x)^2}}=\left\|\begin{array}{l} t=2\ln x, \\ dt=\dfrac{2dx}{x} \end{array}\right\|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\ln x}{3}+C;$$

3.20.

$$\int\frac{\cos 2x dx}{\sqrt{25-7\sin^2 2x}}=\int\frac{\cos 2x dx}{\sqrt{5^2-\left(\sqrt{7}\sin 2x\right)^2}}=\left\|\begin{array}{l} t=\sqrt{7}\sin 2x, \\ dt=2\sqrt{7}\cos 2x dx \end{array}\right\|=\frac{1}{2\sqrt{7}}\int\frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\arcsin\frac{t}{5}+C=\frac{1}{2\sqrt{7}}\arcsin\frac{\sqrt{7}\sin 2x}{5}+C;$$

3.21.

$$\int\frac{2^x dx}{\sqrt{4^x-3}}=\int\frac{2^x dx}{\sqrt{\left(2^x\right)^2-3}}=\left\|\begin{array}{l} t=2^x, \\ dt=2^x\ln 2dx \end{array}\right\|=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right|+C=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x+\sqrt{4^x-3}\right|+C;$$

3.22.

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-7}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x)^2-7}}=\left\|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x, \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array}\right\|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-7}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2-7}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-7}\right|+C.$$

Завдання для аудиторної роботи:

1. $\int \frac{3x^4-7x+5\sqrt{x}}{x^2}dx$; **2.** $\int \frac{(2-x)^2}{x^2\sqrt{x}}dx$; **3.** $\int \frac{4\cdot 3^x-3\cdot 4^x}{3^x}dx$; **4.** $\int \frac{dx}{x^2-4}$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; **6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; **7.** $\int \frac{3+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$; **8.** $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$;

9. $\int (5x+2)^4 dx$; **10.** $\int \frac{dx}{9x^2+16}$; **11.** $\int e^{4x+1}dx$; **12.** $\int \cos 3x\,dx$;

13. $\int \sin(5-4x)dx$; **14.** $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$; **15.** $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$; **16.** $\int x(4x^2+1)^3 dx$;

17. $\int \frac{\sqrt[9]{\ln^4(2x+7)}}{2x+7}dx$; **18.** $\int \frac{\cos x}{4\sin^2 x-49}dx$; **19.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-\ln^2 x}}$;

20. $\int \frac{9^{\operatorname{arctg} 4x}}{1+16x^2}dx$; **21.** $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$; **22.** $\int \frac{dx}{x\cos^2 \ln x}$; **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$;

24. $\int \frac{2+3^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; **25.** $\int \frac{4\operatorname{arctg} 7x-8x}{1+49x^2}dx$.

Відповіді:

1. $x^3-7\ln|x|-\frac{10}{\sqrt{x}}+C$; **2.** $-\frac{8}{3}x^{-3/2}+8x^{-1/2}+2x^{1/2}+C$;

3. $4x-\frac{3\cdot\left(4/3\right)^x}{\ln 4/3}+C$; **4.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; **5.** $\arcsin\frac{x}{3}+C$;

6. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$; **7.** $\frac{3}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x+C$; **8.** $-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$;

9. $\frac{(5x+2)^5}{25}+C$; **10.** $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$; **11.** $\frac{1}{4}e^{4x+1}+C$; **12.** $\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

13. $\frac{1}{4}\cos(5-4x)+C$; **14.** $\frac{1}{8}\operatorname{tg} 8x+C$; **15.** $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x+C$;

16. $\frac{\left(4x^2+1\right)^4}{32}+C$; **17.** $\frac{9}{26}\left(\ln\left(2x+7\right)\right)^{13/9}+C$; **18.** $\frac{1}{28}\ln\left|\frac{2\sin x-7}{2\sin x+7}\right|+C$;

19. $\arcsin\frac{\ln x}{5}+C$; **20.** $\frac{1}{4\ln 9}9^{\operatorname{arctg}4x}+C$; **21.** $-\sin\frac{1}{x}+C$; **22.** $\operatorname{tg}\left(\ln x\right)+C$;

23. $-2\operatorname{ctg}\sqrt{x}+C$; **24.** $2\operatorname{tg}x+\frac{3^{\operatorname{tg}x}}{\ln 3}+C$; **25.** $\frac{2\operatorname{arctg}^2 7x}{7}-\frac{4}{49}\ln\left|1+49x^2\right|+C$.

Завдання для самостійної роботи:

1. $\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+8}}dx$; **2.** $\int\frac{4\operatorname{arctg}9x-x}{1+81x^2}dx$; **3.** $\int\frac{x^2}{9-x^6}dx$; **4.** $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$;

5. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{25-x^2}}dx$; **6.** $\int\frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx$; **7.** $\int x\sin\left(2-3x^2\right)dx$; **8.** $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$;

9. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(3x-1\right)^4}}$; **10.** $\int x^3e^{4-5x^4}dx$; **11.** $\int\frac{dx}{x\left(9\ln^2 x-1\right)}$; **12.** $\int\frac{3^x}{25+9^x}dx$;

13. $\int\frac{18x-7\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$; **14.** $\int\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$; **15.** $\int\frac{\ln x-5}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

16. $\int\frac{\left(\arcsin x\right)^3-5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Відповіді:

1. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+8)^2}+C$; **2.** $\frac{2}{9}\left(\operatorname{arctg}9x\right)^2-\frac{1}{162}\ln\left(1+81x^2\right)+C$;

3. $-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x^3-3}{x^3+3}\right|+C$; **4.** $3\sqrt{x^2-9}+4\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$;

5. $-2\sqrt{25-x^2}-\arcsin\frac{x}{5}+C$; **6.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+C$;

7. $\frac{1}{6}\cos\left(2-3x^2\right)+C$; **8.** $x-4\sqrt{x}+\ln x+C$; **9.** $-\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}+C$;

10. $-\frac{1}{20}e^{4-5x^4}+C$; **11.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3\ln x-1}{3\ln x+1}\right|+C$; **12.** $\frac{1}{5\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{5}+C$;

13. $\frac{9}{4}\ln\left(1+4x^2\right)-\frac{7}{4}\left(\operatorname{arctg}2x\right)^2+C$; **14.** $\sin\left(\ln x\right)+C$;

15. $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}-10\sqrt{\ln x}+C$; **16.** $\frac{\left(\arcsin x\right)^4}{4}-5\arcsin x+C$.

Література:

[2], гл. 5, §1, с. 253–264;

[3], гл.4, с. 173–176;

[4], гл. 5, §1–4, с. 218–223;

[5], гл.10, §1–5, с. 335–344;

[6], гл.7, §1–2, с. 289–299.

Практичне заняття 2

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольні питання

1. Формула інтегрування частинами.

2. Інтегрування функцій $P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)a^{\alpha x}$, $P_n(x)\cos\alpha x$, $P_n(x)\sin\alpha x$.

3. Інтегрування функцій, що містять arc-функцію або логарифмічну функцію.

4. Інтегрування функцій $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$.

5. Інтеграли вигляду $\int \frac{xdx}{\cos^2 \alpha x}$, $\int \frac{xdx}{\sin^2 \alpha x}$, $\int \frac{x\cos \alpha x dx}{\sin^3 \alpha x}$, $\int \frac{x\sin \alpha x dx}{\cos^3 \alpha x}$.

6. Інтеграли вигляду $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx$.

1. Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ такі функції, які мають неперервні похідні, тоді має місце формула $\int udv = uv - \int vdu$.

Застосування цієї формули припускає, що в правій частині інтеграл $\int vdu$ більш простий, ніж початковий.

Розглянемо випадки, коли доцільно використовувати метод інтегрування частинами.

2. В інтегралах $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\cos \alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin \alpha x dx$, $u = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ (n – натуральне).

Слід зауважити, що степінь многочлена вказує на те, скільки разів у даному випадку доведеться інтегрувати частинами.

Розглянемо приклади:

2.1. $$\int (3x-7)\sin 2x dx = \left\| \begin{matrix} u = 3x-7, & \sin 2x dx = dv, \\ du = 3dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{3x-7}{2}\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 3dx = -\frac{3x-7}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C;$$

2.2. $$\int (4+5x)\cos \frac{x}{3} dx = \left\| \begin{matrix} u = 4+5x, & \cos \frac{x}{3} dx = dv, \\ du = 5dx, & v = 3\sin \frac{x}{3} \end{matrix} \right\| =$$

$$= 3(4+5x)\sin \frac{x}{3} - \int 3\sin \frac{x}{3} \cdot 5dx = 3(4+5x)\sin \frac{x}{3} + 45\cos \frac{x}{3} + C;$$

$$\mathbf{2.3}.\ \int (5-2x)7^{3x}dx = \left\| \begin{matrix} u = 5-2x, & 7^{3x}dx = dv, \\ du = -2dx, & v = \dfrac{1}{3}\dfrac{7^{3x}}{\ln 7} \end{matrix} \right\| = \frac{(5-2x)}{3}\cdot\frac{7^{3x}}{\ln 7} - \int \frac{7^{3x}}{3\ln 7}(-2)dx =$$

$$= \frac{5-2x}{3}\cdot\frac{7^{3x}}{\ln 7} + \frac{2}{3\ln 7}\int 7^{3x}dx = \frac{5-2x}{3}\cdot\frac{7^{3x}}{\ln 7} + \frac{2}{9\ln^2 7}7^{3x} + C;$$

$$\mathbf{2.4}.\ \int x^2 e^{5x+1}dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2, & e^{5x+1}dx = dv, \\ du = 2xdx, & v = \dfrac{1}{5}e^{5x+1} \end{matrix} \right\| = \frac{x^2}{5}e^{5x+1} - \int \frac{1}{5}e^{5x+1}\cdot 2xdx =$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x+1} - \frac{2}{5}\int xe^{5x+1}dx = \left\| \begin{matrix} x = u, & e^{5x+1}dx = dv, \\ dx = du, & v = \dfrac{1}{5}e^{5x+1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x+1} - \frac{2}{5}\left[\frac{x}{5}e^{5x+1} - \int \frac{1}{5}e^{5x+1}dx\right] = \frac{x^2}{5}e^{5x+1} - \frac{2x}{25}e^{5x+1} + \frac{2}{125}e^{5x+1} + C.$$

3. Інтегрування функцій, що містять під знаком інтеграла arc-функцію або логарифмічну функцію.

Слід зауважити, що функції, які містять під знаком інтеграла arc-функцію або логарифмічну функцію, можна інтегрувати або частинами, або заміною змінної. Як визначитися з методом інтегрування? Слід перевірити, чи містить підінтегральний вираз похідну відповідної функції. Якщо містить, то обираємо заміну змінної (приклади 3.1, 3.2, 3.19 практичного заняття 1), якщо ні, то обираємо інтегрування частинами (за *u* обираємо arc-функцію або логарифмічну функцію).

Зауважимо, що степінь arc-функції або логарифмічної функції вказує на те, скільки разів у даному випадку доведеться інтегрувати частинами.

Розглянемо приклади:

$$\mathbf{3.1.}\int \operatorname{arcctg} x dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arcctg} x, & dv = dx, \\ du = -\dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{matrix} \right\| = x\cdot \operatorname{arcctg} x + \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x\cdot \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C;$$

$$\mathbf{3.2.}\int \ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{matrix} \right\| = x\cdot \ln x - \int \frac{xdx}{x} = x\cdot \ln x - x + C;$$

$$\mathbf{3.3.}\int \operatorname{arctg} 2x dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 2x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{2dx}{1+4x^2}, & v = x \end{matrix} \right\| = x\cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2xdx}{1+4x^2} =$$

$$\left\| \int \frac{u'}{u} du = \ln|u| + C \right\| = x\cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C;$$

$$\mathbf{3.4.}\int x\cdot \operatorname{arctg} 3x dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 3x, & dv = xdx, \\ du = \dfrac{3dx}{1+9x^2}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} 3x - \int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{3dx}{1+9x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{3}{18}\int \frac{9x^2+1-1}{1+9x^2} dx = \frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{1+9x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}\operatorname{arctg} 3x + C;$$

$$\mathbf{3.5.}\int \left(3x^2+1\right)\operatorname{arctg} x dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = \left(3x^2+1\right)dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x^3 + x \end{matrix} \right\| = \left(x^3+x\right)\cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$-\int \frac{x^3+x}{1+x^2} dx = \left(x^3+x\right)\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\left(x^2+1\right)}{1+x^2} dx = \left(x^3+x\right)\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C;$$

3.6. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx = \left\| \begin{matrix} u = \arccos x, & dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, \\ du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = 2\sqrt{1+x} \end{matrix} \right\| = 2\sqrt{1+x}\cdot \arccos x +$

$+\int \frac{2\sqrt{1+x}dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1+x}\cdot \arccos x + 2\int \frac{\sqrt{1+x}dx}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\cdot \arccos x -$

$-4\sqrt{1-x}+C;$

3.8. $\int \ln\left(x^2+5\right)dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln\left(x^2+5\right), & dv = dx, \\ du = \frac{2xdx}{x^2+5}, & v = x \end{matrix} \right\| = x\cdot\ln\left(x^2+5\right) - \int \frac{2x^2dx}{x^2+5} =$

$= x\cdot\ln\left(x^2+5\right) - 2\int \frac{\left(x^2+5-5\right)dx}{x^2+5} = x\cdot\ln\left(x^2+5\right) - 2\int dx + 10\int \frac{dx}{x^2+5} =$

$= x\cdot\ln\left(x^2+5\right) - 2x + 10\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C;$

3.9. $\int x^2\ln(1+x)dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln(1+x), & dv = x^2dx, \\ du = \frac{dx}{1+x}, & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(1+x) - \int \frac{x^3dx}{3(1+x)} =$

$= \frac{x^3}{3}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+1-1}{1+x}dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)-1}{1+x}dx =$

$= \frac{x^3}{3}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int\left(x^2-x+1-\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(1+x) -$

$-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)+C;$

$$\mathbf{3.10}.\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx=\left\|\begin{matrix} u=\ln^2 x, & dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x^5}}, \\ du=\dfrac{2\ln x dx}{x}, & v=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^5}}=\int x^{-5/2}dx=-\dfrac{2}{3}x^{-3/2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln^2 x+\frac{4}{3}\int\frac{x^{-3/2}\ln x}{x}dx=-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln^2 x+\frac{4}{3}\int\frac{\ln x}{x^{5/2}}dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=\ln x, & dv=\dfrac{dx}{x^{5/2}}, \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=-\dfrac{2}{3}x^{-3/2}\end{matrix}\right\|=-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln^2 x+\frac{4}{3}\left[-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln x+\frac{2}{3}\int\frac{x^{-3/2}}{x}dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{-3/2}\ln x+\frac{8}{9}\int\frac{dx}{x^{5/2}}=-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{-3/2}\ln x-\frac{16}{27}x^{-3/2}+C.$$

4. «Зворотні» інтеграли $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,\quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,$ $\alpha,\ \beta\in R$. У даному випадку за u можна обирати будь-яку з функцій.

4.1.

$$\int e^{2x}\sin 3x dx=\left\|\begin{matrix} u=e^{2x}, & dv=\sin 3x dx, \\ du=2e^{2x}dx, & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int\cos 3x\cdot e^{2x}dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=e^{2x}, & dv=\cos 3x dx, \\ du=2e^{2x}dx, & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x+C.$$

Таким чином, можна записати:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x+C.$$

Позначимо : $\int e^{2x}\sin 3x dx=I$, тоді

$$I+\frac{4}{9}I=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x+C.$$

$$\frac{13}{9}I=\frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)+C\Rightarrow I=\frac{3e^{2x}}{13}\left(-\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)+C_1.$$

5. Метод інтегрування частинами також можно використати при знаходженні інтегралів вигляду:

$$\int\frac{xdx}{\cos^2\alpha x},\quad \int\frac{xdx}{\sin^2\alpha x},\quad \int\frac{x\cos\alpha x dx}{\sin^3\alpha x},\quad \int\frac{x\sin\alpha x dx}{\cos^3\alpha x}.$$

У всіх цих випадках доцільно обирати $u = x$.

5.1. $$\int\frac{xdx}{\sin^2 x}=\left\|\begin{matrix} u=x, & dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}, \\ du=dx, & v=-\operatorname{ctg} x\end{matrix}\right\|=-x\cdot\operatorname{ctg} x+\int\operatorname{ctg} x dx=$$

$$=-x\cdot\operatorname{ctg} x+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=-x\cdot\operatorname{ctg} x+\ln\left|\sin x\right|+C;$$

5.2. $$\int\frac{x\cdot\sin x dx}{\cos^3 x}=\left\|\begin{matrix} u=x, \quad dv=\dfrac{\sin x dx}{\cos^3 x}, \\ du=dx, v=\int\dfrac{\sin x dx}{\cos^3 x}= \quad -\int\left(\cos x\right)^{-3}d\left(\cos x\right)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{x}{2\cos^2 x}-\int\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C.$$

6. Метод інтегрування частинами також можно використати при знаходженні інтегралів вигляду: $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$ та $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ **.**

6.1. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx=$

$$=\left\| \begin{array}{ll} u=\sqrt{x^2+a}, & dv=dx, \\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}, & v=x \end{array} \right\| = x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx+\int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a}-$$

$$-\int \sqrt{x^2+a}dx+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Отримуємо:

$$\int \sqrt{x^2+a}dx=a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+x\sqrt{x^2+a}-\int \sqrt{x^2+a}dx+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \sqrt{x^2+a}dx=\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+C_1.$$

6.2. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

$$=\left\| \begin{array}{ll} u=\sqrt{a^2-x^2}, & dv=dx, \\ du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, & v=x \end{array} \right\| = x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2}-$$

$$-\int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2}-\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int \sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Отримуємо:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int \sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C_1.$$

Завдання для аудиторної роботи:

1. $\int (2x+7)e^{5x}dx$; **2.** $\int (3-4x)\sin 5x dx$; **3.** $\int (4x^2-3x)\cos 5x dx$;

4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$; **5.** $\int \operatorname{arctg} x dx$; **6.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; **7.** $\int e^x \sin x dx$;

8. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{5}(2x+7)e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}+C$; **2.** $-\frac{3-4x}{5}\cos 5x-\frac{4}{25}\sin 5x+C$;

3. $\frac{1}{5}(4x^2-3x)\sin 5x+\frac{1}{25}(8x-3)\cos 5x-\frac{8}{125}\sin 5x+C$;

4. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C$; **5.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$;

6. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$; **7.** $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$;

8. $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+C$.

Завдання для самостійної роботи:

1. $\int x3^{7x}dx$; **2.** $\int (3x+4)e^{-2x}dx$; **3.** $\int (5x+2)\sin\frac{x}{3}dx$; **4.** $\int x^2e^{7x-1}dx$;

5. $\int x\operatorname{arctg} 7x dx$; **6.** $\int x\ln(x^2+5)dx$; **7.** $\int \frac{x}{\cos^2 2x}dx$; **8.** $\int \sin(\ln x)dx$.

Відповіді:

1. $\frac{x3^{7x}}{7\ln 3}-\frac{3^{7x}}{49\ln^2 3}+C$; **2.** $-\frac{3x+4}{2}e^{-2x}-\frac{3}{4}e^{-2x}+C$;

3. $-3(5x+2)\cos\frac{x}{3}+45\sin\frac{x}{3}+C$; **4.** $\frac{1}{7}x^2e^{7x-1}-\frac{2}{49}xe^{7x-1}+\frac{2}{343}e^{7x-1}+C$;

5. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}7x-\frac{7}{98}x+\frac{1}{98}\operatorname{arctg}7x+C$;

6. $\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+5\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C$; **7.** $\frac{x}{2}\operatorname{tg}2x+\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|+C$;

8. $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$.

Література:

[2], гл. 5, §1, с. 264–270;
[3], гл.4, с. 176–178;
[4], гл. 5, §4, с. 224–227;
[5], гл.10, §6, с. 347–350;
[6], гл.7, §2, с. 299–302.

Практичне заняття 3

ІНТЕГРАЛИ ВІД ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Контрольні питання

1. Порядок виділення повного квадрата.
2. Інтегрування функцій $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ та $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.
3. Інтегрування функцій $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ та $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.
4. Інтегрування функції $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

1. При інтегруванні функцій, що містять квадратний тричлен, для перетворення їх до формул інтегрування спочатку слід виділити повний квадрат з квадратного тричлена: $x^2 \pm px + q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$,

та зробити підстановку $t = x \pm \frac{p}{2}$. У такому разі інтеграл стає табличним або таким, спосіб обчислення якого є відомим.

Якщо підінтегральна функція замість $x^2 \pm px + q$ містить $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, то коефіцієнт a слід винести за дужки і звести цей випадок до попереднього.

2. Розглянемо $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ та $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$.

2.1. $$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \left\| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 - 1 + 10 = \\ = (x+1)^2 + 9 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x + 1 = t, \\ dx = dt \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C;$$

2.2. $$\int \frac{9x + 7}{3x^2 - 12x - 13} dx = \frac{1}{3} \int \frac{9x + 7}{x^2 - 4x - \frac{13}{3}} dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x^2 - 4x - \frac{13}{3} = (x-2)^2 - 4 - \frac{13}{3} = \\ = (x-2)^2 - \frac{25}{3} = (x-2)^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} x - 2 = t, dx = dt, x = t + 2, \\ 9x + 7 = 9(t+2) + 7 = 9t + 25 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{9t + 25}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{9t}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{25}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) dt =$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-\frac{25}{3}\right|+\frac{25}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{\sqrt{3}}}{t+\frac{5}{\sqrt{3}}}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-\frac{25}{3}\right|+\frac{5\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t-5}{\sqrt{3}t+5}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x-2)^2-\frac{25}{3}\right|+\frac{5\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}(x-2)-5}{\sqrt{3}(x-2)+5}\right|+C.$$

3. Розглянемо $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

3.1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+11}}=\left\|\begin{gathered}x^2-3x+11=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+11=\\=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}\end{gathered}\right\|=\left\|\begin{gathered}x-\frac{3}{2}=t,\\ dx=dt\end{gathered}\right\|=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{35}{4}}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{35}{4}}\right|+C=\ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}}\right|+C.$$

3.2.

$$\int\frac{2-5x}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\left\|\begin{gathered}5+4x-x^2=-\left[x^2-4x-5\right]=\\=-\left[(x-2)^2-4-5\right]=\end{gathered}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{gathered}-\left[(x-2)^2-9\right]=9-(x-2)^2,\\ x-2=t, dx=dt, x=t+2\end{gathered}\right\|=\left\|\begin{gathered}2-5x=2-5(t+2)=\\=-5t+2-10=-5t-8\end{gathered}\right\|=$$

$$=\int\frac{-5t-8}{\sqrt{9-t^2}}=\frac{-5}{-2}\int\frac{-2tdt}{\sqrt{9-t^2}}-8\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=\frac{5}{2}2\sqrt{9-t^2}-$$

$$-8\arcsin\frac{t}{3}+C=5\sqrt{9-t^2}-8\arcsin\frac{t}{3}+C=5\sqrt{9-(x-2)^2}-8\arcsin\frac{x-2}{3}+C.$$

4. Розглянемо $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. При вивченні цих інтегралів необхідно нагадати такі табличні інтеграли:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C\,;$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a}\pm\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right|+C\,.$$

4.1. $$\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx=\left\|\begin{gathered}2+x-x^2=-\left[x^2-x-2\right]=\\=-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2\right]=\\=-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\end{gathered}\right\|=\left\|\begin{gathered}x-\frac{1}{2}=t,\\dx=dt\end{gathered}\right\|=$$

$$=\int\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2t}{3}+C=$$

$$=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C\,.$$

Завдання для аудиторної роботи:

1. $\int\frac{dx}{x^2-4x+20}$; **2.** $\int\frac{dx}{x^2+2x-24}$; **3.** $\int\frac{2x+7}{40-x^2-6x}\,dx$;

4. $\int\frac{3x+7}{x^2+2x+82}\,dx$; **5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{-6x-x^2}}$; **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-14x+13}}$;

7. $\int\frac{4x+5}{\sqrt{10x-x^2-21}}\,dx$; **8.** $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+8x+9}}\,dx$; **9.** $\int\sqrt{x^2+10x+6}\,dx$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}+C$; **2.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-6}{x+4}\right|+C$; **3.** $-\ln\left|40-x^2-6x\right|-\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C$;

4. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+82\right|+\frac{4}{9}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{9}+C$; **5.** $\arcsin\frac{x+3}{3}+C$;

6. $\ln\left|x-7+\sqrt{x^2-14x+13}\right|+C$; **7.** $-4\sqrt{10x-x^2-21}+25\arcsin\frac{x-5}{2}+C$;

8. $5\sqrt{x^2+8x+9}-17\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+9}\right|+C$;

9. $\frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+10x+6}-\frac{19}{2}\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+6}\right|+C$.

Завдання для самостійної роботи:

1. $\int\frac{3x+2}{2x^2-3x+1}dx$; **2.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$; **3.** $\int\sqrt{5x^2-2x+1}\,dx$;

4. $\int\frac{dx}{3x^2+6x+5}dx$; **5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+4}}$; **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{7-16x-2x^2}}$;

7. $\int\frac{3x+1}{2x^2+5x+2}dx$; **8.** $\int\frac{7x-2}{\sqrt{9-4x-5x^2}}dx$; **9.** $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.

Відповіді:

1. $\frac{3}{4}\ln\left|x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|+\frac{17}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|+C$; **2.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+C$;

3. $\sqrt{5}\left[\frac{5x-1}{10}\sqrt{x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}+\frac{2}{25}\ln\left|x-\frac{1}{5}+\sqrt{x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}\right|\right]+C$;

4. $\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(x+1\right)}{\sqrt{2}}+C$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{4}{3}}\right|+C$;

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\left(x+4\right)}{\sqrt{39}}+C$; **7.** $\frac{3}{4}\ln\left|x^2+\frac{5}{2}x+1\right|-\frac{11}{12}\ln\left|\frac{2x+1}{2x+4}\right|+C$;

8. $-\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{9}{5}-\frac{4}{5}x-x^2}-\frac{24}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x+2}{7}+C$;

9. $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$.

Література:

[3], гл.4, с. 178–181;

[4], гл. 5, §5, с. 227–229;

[5], гл.10, §5, с. 344–347.

Практичне заняття 4

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. НАЙПРОСТІШІ РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ ТА ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Контрольні питання

1. Раціональні дроби, поняття правильного та неправильного дробу. Найпростіші раціональні дроби. Розкладання раціонального дробу на найпростіші.

2. Інтегрування раціональних дробів.

1. Раціональним дробом називається функція, яка визначена як відношення двох многочленів, тобто $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$ та $P_n(x)$ – многочлени відносно x степеня m та n.

Раціональний дріб називається правильним, якщо $m<n$, і неправильним, якщо $m\ge n$.

Будь-який неправильний нескоротний дріб можна записати як суму многочлена та правильного раціонального дробу, поділивши чисельник на знаменник.

До найпростіших дробів належать:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n},\quad \left(n\ge 2,\ n\in \mathrm{N}\right).$$

2. Алгоритм інтегрування раціональних дробів:

1) якщо дріб неправильний, то слід подати його як суму многочлена та правильного раціонального дробу;

2) знаменник правильного дробу розкласти на множники;

3) записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів (вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника);

4) проінтегрувати цілу частину многочлена та найпростіші дроби.

Зауважимо, якщо знаменник правильного дробу має вигляд $(x-a)^n\left(x^2+px+q\right)^m$, то правильний дріб зображується у вигляді суми найпростіших дробів за формулою

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$ де $A_1, A_2, \ldots, A_n, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_m, N_m$ –

невизначені (невідомі) коефіцієнти, деякі з них можуть дорівнювати нулю.

2.1. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{}\, x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\
\cline{2-2}
x^5 - 4x^3 & x^2 + x + 4 \\
\cline{1-1}
\underline{}\, x^4 + 4x^3 - 8 & \\
x^4 - 4x^2 & \\
\cline{1-1}
\underline{}\, 4x^3 + 4x^2 - 8 & \\
4x^3 - 16x & \\
\cline{1-1}
4x^2 + 16x - 8. &
\end{array}
$$

Таким чином,

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + 4 \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}.$$

Розглянемо тепер правильний дріб і розкладемо його знаменник на прості множники, а потім запишемо цей дріб у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами та знайдемо ці коефіцієнти:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x\left(x^2 - 4\right)} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Далі усі найпростіші дроби зводять до спільного знаменника та прирівнюють один до одного чисельники обох частин рівності:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів використовують спосіб частинних значень, який полягає в тому, що аргументу задають певні зручні значення (наприклад, значення коренів знаменника).

$x = 2:\ 10 = 8B,\ B = \dfrac{5}{4}$,

$x = -2:\ -6 = 8C,\ C = -\dfrac{3}{4}$,

$x=0:\ -2=-4A,\ \ A=\frac{1}{2}.$

Отже, $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$.

Остаточно отримуємо:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

2.2. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб, знаменник якого – добуток простих множників, тому в даному випадку необхідно цей дріб записати у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами та обчислити їх:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Зводячи до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівнюючи один до одного чисельники обох частин рівності, отримуємо:

$$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3),$$

Для визначення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$x=1:\ -48=-12A,\ \ A=4$,

$x=-3:\ -196=28B,\ \ B=-7$,

$x=4:\ 105=21C,\ \ C=5$.

Отже, даний дріб можна записати:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}=\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}.$$

Таким чином,

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx=4\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x+3}+5\int\frac{dx}{x-4}=$$

$$=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$$

2.3. $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$.

Підінтегральна функція – правильний дріб, знаменник якого перетворюється в 0 при $x=0$ та $x=-1$.

При цьому $x=0$ – корінь простий (кратності 1), а $x=-1$ – корінь кратності 2. Тоді

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$x^2-3x+2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx.$$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$x=0:\quad 2=A$,

$x=-1:\ 6=-C,\ C=-6$,

$x=2:\quad 0=9A+6B+2C$.

З останньої рівності отримуємо:

$$0 = 18 + 6B - 12;\ 6B + 6 = 0,\ B = -1.$$

Згідно з цими обчисленнями, можна записати:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} \right) dx = 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 6\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \frac{6}{x+1} + C.$$

2.4. $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2 (x^2-1)}.$

У даному випадку підінтегральна функція – неправильний дріб, а тому необхідно виділити цілу та дробову частину цього дробу, попередньо розкривши дужки в знаменнику.

$$(x-1)^2 (x^2-1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = x^4 - x^2 - 2x^3 + 2x + x^2 - 1 =$$

$$= x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

$$\begin{array}{rl}
-\; x^5 & \big|\ x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \\
\underline{x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x} & \big|\ \overline{\;x + 2\;} \\
-\; 2x^4 - 2x^2 + x & \\
\underline{2x^4 - 4x^3 + 4x - 2} & \\
4x^3 - 2x^2 - 3x + 2. &
\end{array}$$

Таким чином,

$$\frac{x^5}{(x-1)^2 (x^2-1)} = x + 2 + \frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2 (x^2-1)} = x + 2 + \frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3 (x+1)}.$$

Слід наголосити, що знаменник правильного дробу перетворюється в 0 при $x = 1$ та $x = -1$, при цьому $x = -1$ – простий корінь, а $x = 1$ – корінь кратності 3.

Враховуючи сказане вище, маємо:

$$\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один одному чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$4x^3-2x^2-3x+2=A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3.$$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$x=1:\ 1=2C,\ C=\dfrac{1}{2},$

$x=-1:\ -1=-8D,\ D=\dfrac{1}{8},$

$x=2:\ 20=3A+3B+3C+D,\ 20=3A+3B+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{8},$

$3A+3B=\dfrac{147}{8},\ A+B=\dfrac{147}{24},$

$x=0:\ 2=A-B+C-D;\ 2=A-B+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8};\ A-B=\dfrac{13}{8}.$

Розглянемо систему рівнянь:

$$+\begin{cases} A+B=\dfrac{147}{24}, \\ A-B=\dfrac{13}{8}. \end{cases}$$

$2A=\dfrac{147}{24}+\dfrac{13}{8}=\dfrac{147+39}{24}=\dfrac{186}{24}=\dfrac{31}{4}\ ,A=\dfrac{31}{8}.$

$B=A-\dfrac{13}{8}=\dfrac{31}{8}-\dfrac{13}{8}=\dfrac{18}{8}=\dfrac{9}{4}.$

Таким чином,

$$\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2 (x^2-1)} = \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^3 (x+1)} =$$

$$= \int \left(x + 2 + \frac{31}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{31}{8} \ln|x-1| - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln|x+1| + C.$$

2.5. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.

Підінтегральна функція – неправильний дріб, а тому необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник виділити цілу та дробову частину:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^4 + 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} x^4 - x^3 + x^2 - x & x + 1 \\ \cline{1-1} -\; x^3 - x^2 + x + 1 & \\ x^3 - x^2 + x - 1 & \\ \cline{1-1} 2. & \end{array}$$

Таким чином, отримали суму многочлена і правильного дробу

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Розкладемо знаменник правильного дробу на множники:

$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$. Множник (x^2+1) не має дійсних коренів.

Таким чином,

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один одному чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$1 = A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right),$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C\ .$$

Для обчислення коефіцієнтів *A, B, C* скористаємося тим, що два многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x (спосіб порівняння коефіцієнтів):

$$\left.\begin{array}{l|lcr} x^2 & 0 & = & A+B, \\ x^1 & 0 & = & -B+C, \\ x^0 & 1 & = & A-C. \end{array}\right\}$$

Для того щоб знайти розвязок цієї системи, можна додати ліві та праві частини рівнянь. Тоді $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$, а далі, враховуючи рівняння системи, одержимо $B = -\frac{1}{2},\ C = -\frac{1}{2}$.

Отже,

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int\left(x+1\right)dx + 2\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x-1\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+C = \frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\operatorname{arctg}x+C.$$

2.6. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

У даному випадку $\frac{1}{x^3+1}$ – правильний дріб. Розкладемо $\left(x^3+1\right)$ на множники, використовуючи формулу скороченого множення: $x^3+1=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. Тоді дріб можна розкласти на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$1=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1),$$

$$1=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C.$$

Для визначення *A, B, C* скористаємось способом порівняння коефіцієнтів.

$$\left.\begin{array}{l|lcl} x^2 & 0 & = & A+B, \\ x^1 & 0 & = & -A+B+C, \\ x^0 & 1 & = & A+C, \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow B=-A, \\ \\ \Rightarrow C=1-A, \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-A-A+1-A\ ;$$

$$3A=1;\ A=\frac{1}{3};\ B=-\frac{1}{3};\ C=\frac{2}{3}.$$

Отримуємо:

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+3|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Завдання для аудиторної роботи:

1. Розкласти многочлен на множники:

а) $3x^2+7x-10$; б) x^3+x-2; в) x^3+5x^2+7x+3.

2. Записати неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного дробу:

а) $\dfrac{x^5+9x^3+4}{x^2+3x}$; б) $\dfrac{2x^4-5x^2-8x-8}{x\left(x^2+4\right)}$.

3. Записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

а) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$; б) $\dfrac{10x^2-5x+8}{x^3+2x^2}$; в) $\dfrac{x^2+28x+4}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)}$.

4. Знайти:

а) $\displaystyle\int\frac{4x^2+11x-8}{x^3-3x^2-4x}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Відповіді:

1. а) $(x-1)(3x+10)$; **б)** $(x-1)\left(x^2+x+2\right)$; **в)** $(x+1)^2(x+3)$.

2. а) $x^3-3x^2+18x-54+\dfrac{162x+4}{x^2+3x}$; **б)** $2x-\dfrac{13x^2+8x+8}{x^3+4x}$.

3. а) $\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{1}{(x+1)}+\dfrac{5}{3(x+2)}$; **б)** $-\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{29}{2}\cdot\dfrac{1}{x+2}$;

в) $-\dfrac{6}{(x+2)^2}+\dfrac{7}{x^2+4}$. **4. а)** $\ln\left|\dfrac{x^2(x-4)^5}{(x+1)^3}\right|+C$;

б) . $x-\dfrac{1}{6}\ln|x|-\dfrac{7}{2}\ln|x-2|+\dfrac{26}{3}\ln|x-3|+C$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти:

а) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$;. б) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

г) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Відповіді:

1. а) $5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$; **б)** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$;

в) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

г) $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

Література:

[2], гл. 5, §1, с. 270–277;

[3], гл.4, с. 181–191;

[4], гл. 5, §6, с. 229–234;

[5], гл.10, §7–9, с. 350–359;

[6], гл.7, §3, с. 302–312.

Практичне заняття 5

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні питання

1.Інтегрування функцій, які можна привести до табличних, використовуючи відомі тригонометричні формули.

2.Інтегрування функцій $\sin^n x,\ \cos^n x$:

а) n – парне невід'ємне число;

б) n – непарне невід'ємне число.

3. Інтегрування функцій $\sin^n x\cdot\cos^m x$:

а) $n+m$ – парне невід'ємне число;

б) $n+m$ – непарне невід'ємне число.

4. Інтегрування виразів $\sin\alpha x\cdot\cos\beta x$, $\sin\alpha x\cdot\sin\beta x$, $\cos\alpha x\cdot\cos\beta x$.

5. Інтегрування функцій $\mathrm{tg}^n x, \mathrm{ctg}^n x$.

6. Універсальна тригонометрична підстановка.

7. Частинні підстановки:

а) інтегрування функцій $R(\sin x,\cos x)$, парних відносно $\sin x,\cos x$: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$;

б) інтегрування функцій $R(\sin x,\cos x)$, непарних відносно $\cos x$: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$;

в) інтегрування функцій $R(\sin x,\cos x)$, непарних відносно $\sin x$: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$.

1. Перш ніж почати розглядати будь-які методи інтегрування тригонометричних функцій, необхідно з'ясувати, чи можна такі інтеграли звести до табличних, використовуючи відомі тригонометричні формули.

1.1. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$;

1.2. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) \cdot d\left(\operatorname{tg} x\right) =$

$= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$

1.3. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

1.4.

$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C;$

1.5. $\int \frac{\sin x}{\left(1-\cos x\right)^2} dx = \int \frac{d\left(1-\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)^2} = -\frac{1}{1-\cos x} + C = \frac{1}{\cos x - 1} + C.$

2. а) При інтегруванні функцій $\sin^n x, \cos^n x$, де n – парне невід'ємне число, використовують тригонометричні формули зниження степеня: $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

2.1. $\int \cos^2 4x dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\sin 8x + C;$

2.2. $\int \sin^4 3x dx = \int \left(\sin^2 3x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x\right) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 12x}{2} dx =$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8\cdot 12}\sin 12x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C.$

б) При інтегруванні функцій $\sin^n x, \cos^n x$, де n – непарне невід'ємне число, відокремлюючи один множник та підводячи його під знак диференціала, зводимо інтеграл, що розглядається, до табличного.

2.3. $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right) \cdot d\left(\cos x\right) =$

$$= -\int d\left(\cos x\right) + \int \left(\cos x\right)^2 d\left(\cos x\right) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

2.4. $\int \cos^5 2x dx = \int \cos^4 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 2x\right)^2 \cdot d\left(\sin 2x\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1-2\sin^2 2x + \sin^4 2x\right) \cdot d\left(\sin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - 2\cdot\frac{\left(\sin 2x\right)^3}{3} + \frac{\left(\sin 2x\right)^5}{5}\right) + C = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\left(\sin 2x\right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{10}\left(\sin 2x\right)^5 + C.$$

3. а) При інтегруванні функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$, де n та m – парні невід'ємні числа використовуємо формули зниження степеня (дивись 2. а).

3.1. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x\, dx = \int \sin^2 3x \cdot \left(\sin 3x \cdot \cos 3x\right)^2 dx = \int \sin^2 3x \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 6x dx == \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\left(1-\cos 6x\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1-\cos 12x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 12x - \cos 6x + \cos 6x \cdot \cos 12x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 12x - \cos 6x + \frac{1}{2}\left(\cos 18x + \cos 6x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 18x\right) dx =$$

$$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{12}\sin 12x-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{36}\sin 18x\right)+C.$$

б) При інтегруванні функцій $\sin^n x\cdot\cos^m x$, де $n+m$ – непарне невід'ємне число, відокремлюємо один множник та підводимо його під знак диференціала або робимо заміну змінних. Зауважимо, що обирають $t=\sin x$, коли m непарне, або $t=\cos x$, коли n непарне. У тому випадку, коли n та m обидва непарні, за t можна обирати будь-яку функцію.

3.2.

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^7 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\cos^6 x\cdot\cos x\,dx=\left\|\begin{matrix} t=\sin x, & dt=\cos x\,dx, \\ \sin^2 x=1-\cos^2 x= & 1-t^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int t^6\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^6-t^8\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^9}{9}+C=\frac{\sin^7 x}{7}-\frac{\sin^9 x}{9}+C;$$

3.3.

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^7 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\cos^7 x\cdot\sin x\,dx=\left\|\begin{matrix} t=\cos x, & dt=-\sin x\,dx, \\ \sin^2 x=1-\cos^2 x & =1-t^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\int t^7\left(1-t^2\right)dt=-\int\left(t^7-t^9\right)dt=-\frac{t^8}{8}+\frac{t^{10}}{10}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+\frac{\cos^{10} x}{10}+C.$$

4. При інтегруванні $\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$, $\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$, $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx$ використовують тригонометричні формули:

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)x+\sin\left(\alpha-\beta\right)x\right],$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)x-\cos\left(\alpha+\beta\right)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)x+\cos\left(\alpha-\beta\right)x\right],$$

які дозволяють зобразити добуток синусів та косинусів у вигляді лінійних комбінацій цих же функцій (з іншими аргументами).

4.1. $\int \sin 7x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos\left(7x-2x\right)-\cos\left(7x+2x\right)\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$

5. При інтегруванні функцій $\mathrm{tg}^n x, \mathrm{ctg}^n x$ використовують підстановку $t = \mathrm{tg}\, x$ або $t = \mathrm{ctg}\, x$ **.**

5.1. $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \left\| \mathrm{tg}\, x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\| = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt.$

У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$\begin{array}{r|l} -\,t^5 & t^2+1 \\ \underline{t^5+t^3} & \overline{t^3-t} \\ -\,-t^3 & \\ \underline{-t^3-t} & \\ t. & \end{array}$$

Отже, отримуємо:

$\int\left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} +$

$+\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right) + C;$

5.2. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^8 x} = \int \left(\mathrm{tg}\, x\right)^8 dx = \left\| \mathrm{tg}\, x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\| = \int \frac{t^8}{1+t^2}dt.$

Аналогічно попередньому прикладу розділимо чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;t^8 & \;t^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\
-\;-t^6 & \\
\underline{-t^6-t^4} & \\
\quad -\;t^4 & \\
\quad \underline{t^4+t^2} & \\
\quad -\;-t^2 & \\
\quad \underline{-t^2-1} & \\
\qquad\quad 1. &
\end{array}
$$

Отже, отримуємо:

$$
\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t+C=
$$

$$
=\frac{\operatorname{tg}^7x}{7}-\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C.
$$

6. Розглянемо інтегрування функцій $R(\sin x,\cos x)$ – раціональних функцій від змінних $\sin x$ та $\cos x$. У цьому випадку використовують універсальну тригонометричну підстановку:

$$
t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\text{, тоді } x=2\operatorname{arctg}t\,,\; dx=\frac{2dt}{1+t^2}\,,\; \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,,\; \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,.
$$

Універсальна підстановка приводить інтеграл, що розглядається, до інтеграла від раціонального дробу нового аргументу t.

6.1. $$\int\frac{dx}{3\cos x+2}=\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,dx=\frac{2dt}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right\|=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left[3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right]}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{3-3t^2+2+2t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{5-t^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-5}=-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}\right|+C;$$

6.2. $$\int\frac{dx}{4\sin x+5}=\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\right\|=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{8t}{1+t^2}+5\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{8t+5t^2+5}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{5t^2+8t+5}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}+1}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}=\frac{2}{5}\int\frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C;$$

6.3. $$\int\frac{dx}{5\sin x-\cos x+4}=\left\|\begin{array}{ll}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, & dx=\frac{2dt}{1+t^2},\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right\|=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{10t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+4\right)}=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{10t-1+t^2+4+4t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$= 2\int \frac{dt}{5t^2+10t+3} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+2t+\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t+1)^2-1+\frac{3}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t+1)^2-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{5}}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{\frac{2}{5}}}{t+1+\sqrt{\frac{2}{5}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{\frac{2}{5}}}{t+1+\sqrt{\frac{2}{5}}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{\frac{2}{5}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{\frac{2}{5}}}\right| + C.$$

7. Слід відзначити, що універсальна підстановка може приводити до інтеграла від раціонального дробу, корені знаменника якого важко знайти. Розглянемо випадки, коли можна використовувати інші підстановки.

а) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x, \cos x$, доцільно використати підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

7.1. $$\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2} = \left\| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t, & dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} & \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left[\frac{3}{1+t^2}+2\right]} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{3+2+2t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2t^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot \operatorname{tg} x\right) + C;$$

7.2. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+5} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, & \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{4t^2}{1+t^2}+5\right)} =$

$$= \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{4t^2+5+5t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{9t^2+5} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3t)}{(3t)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{5}}+C = \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}+C;$$

7.3. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-\cos^2 x+4} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right\| =$

$$= \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{5t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}+4\right)} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{5t^2-1+4+4t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{9t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3t)}{(3t)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{3}}+C = \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot t\right)+C =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x\right)+C.$$

б) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, доцільно використати підстановку $\sin x = t$.

7.4. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x} = \left\| \begin{matrix} \sin x = t, & x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 dt}{t^4\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt =$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

в) Якщо підінтегральна функція $R\left(\sin x, \cos x\right)$ є непарною відносно $\sin x$, доцільно використати підстановку $\cos x = t.$

$$\mathbf{7.5.}\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x - 3} = \left\| \begin{array}{ll} \cos x = t, & x = \arccos t \\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \sin x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\| = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 dt}{(t-3)\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t-3}\,dt =$$

$$\int \frac{t^2-9+8}{t-3}\,dt = \int (t+3)\,dt + 8\int \frac{dt}{t-3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

Відзначимо, що розглянуті підстановки, коли їх можна застосовувати, зазвичай приводять до більш простих обчислень, ніж універсальна підстановка, проте є випадки, коли універсальна підстановка забезпечує найкоротший шлях. Під час вибору підстановки необхідна певна обачність.

Ми розглянули основні методи інтегрування тригонометричних функцій. Однак розв’язання вказаних інтегралів залишає широке коло можливостей для ініціативи математика.

Завдання для аудиторної роботи:

1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; **2.** $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; **3.** $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$;

4. $\int \cos^2 6x\,dx$; **5.** $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$; **6.** $\int \sin^3 4x\,dx$; **7.** $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{1+\cos^2 x}$;

8. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x\,dx$; **9.** $\int \sin 5x\cdot\sin 3x\,dx$; **10.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$; **2.** $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C$; **3.** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(3\,\mathrm{tg}\,x\right)+C$;

4. $\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\sin 12x+C$; **5.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x-\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}^2 x+1\right|+C$;

6. $-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{12}\cos^3 4x+C$; **7.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x+3\cos x-4\,\mathrm{arctg}(\cos x)+C$;

8. $\frac{3}{5}(\sin x)^{5/3}-\frac{3}{11}(\sin x)^{11/3}+C$; **9.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; **10.** $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}^2 x\right)+C$.

Завдання для самостійної роботи:

1. $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$; **2.** $\int\sin^2 7x\,dx$; **3.** $\int\cos^3 2x\,dx$; **4.** $\int\frac{dx}{\mathrm{ctg}^8 x}$; **5.** $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$;

6. $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^5 x}$; **7.** $\int\cos^4 x\,dx$; **8.** $\int\sin 3x\cdot\cos 7x\,dx$;

9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x+15\cos^2 x}$.

Відповіді:

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)+C$; **2.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{28}\sin 14x+C$;

3. $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$; **4.** $x-\frac{1}{7}\mathrm{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x+\mathrm{ctg}\,x+C$;

5. $\frac{3}{5}(\cos x)^{5/3}+3(\cos x)^{-1/3}+C$; **6.** $-\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2\sin^2 x}+C$;

7. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; **8.** $-\frac{1}{20}\cos 10x+\frac{1}{8}\cos 4x+C$;

9. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x-3}{\sqrt{6}}+C$.

Література:

[3], гл.4, с. 191–196;
[4], гл. 5, §7, с. 238–243;
[5] гл.10, §12, с. 364–368;
[6] гл.7, §4, с. 313–315, 316–318.

Практичне заняття 6

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

Контрольні питання

1. Інтегрування функцій $R\left(x, x^{m_1/n_1}, ..., x^{m_k/n_k}\right)$.

2. Інтегрування функцій $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)$.

3. Інтегрування ірраціональних функцій вигляду:

$$R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right), R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right), R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right).$$

4. Біноміальні інтеграли $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа.

1. Розглянемо раціональну функцію відносно своїх аргументів $R\left(x, x^{m_1/n_1}, ..., x^{m_k/n_k}\right)$, де $\frac{m_1}{n_1}, ..., \frac{m_k}{n_k}$ – нескоротні дроби. Для того щоб позбутися ірраціональності, необхідно скористатися заміною $x = t^s$, де s – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, ..., \frac{m_k}{n_k}$.

1.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4} = \left\| \begin{matrix} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\| = \int \frac{2tdt}{t+4} = 2\int \frac{t+4-4}{t+4} dt = 2t - 8\ln|t+4| + C =$

$= 2\sqrt{x} - 8\ln\left|\sqrt{x}+4\right| + C;$

1.2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5} = \left\| \begin{matrix} x = t^3, \\ dx = 3t^2dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{3t^2dt}{t+5} = 3\int \frac{t^2dt}{t+5} = 3\int \left(t - 5 + \frac{25}{t+5}\right)dt = \frac{3t^2}{2} - 15t +$

$+75\ln|t+5| + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 15\sqrt[3]{x} + 75\ln\left|\sqrt[3]{x}+5\right| + C;$

1.3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx = \left\| \begin{matrix} x = t^{12}, & \sqrt{x} = t^6,\ \sqrt[3]{x^2} = t^8, \\ dx = 12t^{11}dt, & \sqrt[4]{x} = t^3 \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$

$$=12\int\frac{t^{17}dt}{t^3\left(t^5-1\right)}=12\int\frac{t^{14}}{t^5-1}dt=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{10}+\frac{\sqrt[12]{x^5}}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

2. Якщо раціональна відносно своїх аргументів функція матиме вигляд $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)$, де $\frac{m_1}{n_1},...,\frac{m_k}{n_k}$ – нескоротні дроби, то аналогічно з попереднім випадком необхідно позначити $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, s – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1},...,\frac{m_k}{n_k}$.

2.1. $\int\frac{\sqrt{x+3}}{2+\sqrt[3]{x+3}}dx=\left\|\begin{matrix}x+3=t^6,\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right\|=\int\frac{t^3\cdot 6t^5dt}{t^2+2}=6\int\frac{t^8dt}{t^2+2}.$

Отримали неправильний дріб. Розділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{l|l}
-\ t^8 & t^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{t^8+2t^6} & t^6-2t^4+4t^2-8 \\
-\ -2t^6 & \\
\underline{-2t^6-4t^4} & \\
-\ 4t^4 & \\
\underline{4t^4+8t^2} & \\
-\ -8t^2 & \\
\underline{-8t^2-16} & \\
\quad 16. &
\end{array}$$

Остаточно отримуємо:

$$6\int\left(t^6-2t^4+4t^2-8+\frac{16}{t^2+2}\right)dt=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}-8t+\frac{16}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{(x+3)\sqrt[6]{x+3}}{7}-\frac{2\sqrt[6]{(x+3)^5}}{5}+\frac{4\sqrt{x+3}}{3}-8\sqrt[6]{x+3}+\frac{16}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{2}}\right)+C;$$

2.2. $$\int\sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx=\left\|\begin{array}{l}\dfrac{3-2x}{2x-7}=t^2\Rightarrow 3-2x=t^2(2x-7)\Rightarrow x=\dfrac{7t^2+3}{2\left(t^2+1\right)},\\ dx=\dfrac{14t\left(t^2+1\right)-\left(7t^2+3\right)2t}{2\left(t^2+1\right)^2}dt=\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}dt\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{4t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}u=t,\quad du=dt,dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2},\\ v=\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+1\right)^{-2}d\left(t^2+1\right)=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{4t}{2\left(t^2+1\right)}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{2t}{\left(t^2+1\right)}+2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-4x^2+20x-21}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}+C.$$

3. Окремо слід розглянути інтегрування деяких ірраціональних виразів, а саме:

$$R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right),\ R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right),\ R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

за допомогою тригонометричних підстановок.

Ці функції за допомогою відповідних тригонометричних підстановок легко можна звести до $R(\sin x,\cos x)$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція змінних $\sin x$ та $\cos x$.

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=a\sin t,\\ dx=a\cos t\,dt\end{matrix}\right\|=\int R_1\left(\sin t,\cos t\right)dt \text{ або}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=a\cos t,\\ dx=-a\sin t\,dt\end{matrix}\right\|=\int R_2\left(\sin t,\cos t\right)dt ,$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=\dfrac{a}{\cos t},\\ dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt\end{matrix}\right\|=\int R_3\left(\sin t,\cos t\right)dt \text{ або}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=\dfrac{a}{\sin t},\\ dx=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt\end{matrix}\right\|=\int R_4\left(\sin t,\cos t\right)dt .$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left\|\begin{matrix} x=a\,\mathrm{tg}\,t,\\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt\end{matrix}\right\|=\int R_5\left(\sin t,\cos t\right)dt .$$

3.1. $\int\sqrt{9-x^2}dx=\left\|\begin{matrix} x=3\sin t, dx=3\cos t dt,\\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\end{matrix}\right\|=$

$$=\int 3\cos t\cdot 3\cos t dt=9\int\cos^2 t dt=\frac{9}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C.$$

Для того щоб повернутися до початкової змінної, необхідно змінну t виразити через x: $\sin t=\dfrac{x}{3}\Rightarrow t=\arcsin\dfrac{x}{3}.$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=$$

$$=\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}=\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}.$$

Тоді

$$\int\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\cdot\frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C.$$

3.2. $$\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}dx=\left\|\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{\cos t},\ \ dx=\dfrac{5\sin t}{\cos^2 t}dt, \\ \sqrt{x^2-25}=\sqrt{\dfrac{25}{\cos^2 t}-25}= \\ =\sqrt{\dfrac{25\left(1-\cos^2 t\right)}{\cos^2 t}}=\dfrac{5\sin t}{\cos t} \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{5\sin t\cdot\cos^2 t\cdot 5\sin t}{\cos t\cdot 25\cdot\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos t}-\int\cos t dt=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t+C.$$

Відповідь необхідно записати, повернувшись до початкової змінної. Для цього виконаємо перетворення.

Через те, що $x=\dfrac{5}{\cos t}\Rightarrow t=\arccos\dfrac{5}{x}.$ Тоді

$$\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1}{1-\mathrm{tg}\frac{t}{2}},\ \mathrm{tg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\sqrt{x^2-25}}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+5}.$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+5}+1}{1-\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+5}}=\frac{\sqrt{x^2-25}+x+5}{x+5-\sqrt{x^2-25}}=\frac{x+5+\sqrt{x^2-25}}{x+5-\sqrt{x^2-25}}.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}dx=\ln\left(\frac{x+5+\sqrt{x^2-25}}{x+5-\sqrt{x^2-25}}\right)-\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}+C.$$

3.3. $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^5}}=\left\|\begin{array}{l} x=2\,\mathrm{tg}\,t,\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t},\left(4+x^2\right)^{5/2}=\left(4+4\,\mathrm{tg}^2 t\right)^{5/2}= \\ \quad =4^{5/2}\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)^{5/2}=2^5\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^{5/2}=\dfrac{2^5}{\cos^5 t} \end{array}\right\|=$$

$$= \int \frac{4\,\mathrm{tg}^2 t \cdot \cos^5 t \cdot 2\,dt}{2^5 \cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 t \cdot \cos^5 t\, dt}{\cos^4 t} = \frac{1}{4}\int \sin^2 t \cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 t\, d(\sin t) = \frac{1}{4}\frac{(\sin t)^3}{3} + C.$$

Повернемося до початкової змінної. Отримуємо:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^5}} = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)^3 + C = \frac{x^3}{12\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}} + C\,.$$

4. Біноміальні інтеграли $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа, можна звести до інтегрування раціональної функції лише в таких трьох випадках:

1) якщо p – ціле число, тоді $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m та n;.

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, тоді $a+bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, тоді $ax^{-n} + b = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Якщо ж $n=1$, тоді всі ці випадки еквівалентні таким:

а) p – ціле;

б) m – ціле;

в) $m+p$ – ціле.

В інших випадках біноміальні інтеграли не виражаються через елементарні функції.

4.1. $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx = I$.

У даному випадку $m=-1, n=\dfrac{1}{3}, p=-3$, тобто p – ціле. Таким чином, ми маємо справу з першим випадком; отже, $x=t^3; dx=3t^2dt$.

$$I=\int\frac{3t^2dt}{t^3(1+t)^3}=3\int\frac{dt}{t(t+1)^3}.$$

Отримали правильний дріб, який розкладаємо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{t(t+1)^3}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(t+1)}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{(t+1)^3},$$

$$1=A(t+1)^3+Bt(t+1)^2+Ct(t+1)+Dt.$$

Для визначення *A, B, C, D* скористаємось способом порівняння коефіцієнтів.

$$\begin{cases} t^3 \left| \quad 0=A+B, \qquad A=1, \right. \\ t^2 \left| \quad 0=3A+2B+C, \quad B=-1, \right. \\ t^1 \left| \quad 0=3A+B+C+D, \quad C=-1, \right. \\ t^0 \left| \quad 1=A, \qquad D=-1. \right. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо:

$$3\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t+1)^3}\right]dt=3\left[\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2(t+1)^2}\right]+C=$$

$$=3\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+\frac{2t+3}{2(t+1)^2}\right]+C=3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}\right]+C.$$

4.2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=I$.

У даному прикладі $m=-\dfrac{1}{2}; p=\dfrac{1}{3}; n=\dfrac{1}{4}; \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1/2+1}{1/4}=2$, тобто має місце другий випадок. Згідно зі вказаного вище, позначимо $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, тоді $x=\left(t^3-1\right)^4; dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt$.

Таким чином,

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=12\int\frac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt$$

$$=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+C=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=\frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7-3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4+C.$$

4.3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\int x^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=I\ .$$

У даному прикладі $m=-\frac{3}{2}; n=\frac{3}{4}; p=-\frac{1}{3}.$ Обчислимо:

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{2\cdot 3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1,$$ тобто маємо випадок 3.

Згідно з формулами позначимо

$$1+x^{-\frac{3}{4}}=t^3,\ \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}+1=t^3\Rightarrow\frac{1+x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=t^3;$$

$$x=\frac{1}{\left(t^3-1\right)^{\frac{4}{3}}}; dx=-\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-\frac{4t^2dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}};$$

$$1+x^{\frac{3}{4}}=t^3\cdot x^{\frac{3}{4}}=t^3\cdot\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}=t^3\left(t^3-1\right)^{-1};$$

$$\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left[t^3\left(t^3-1\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}=t^{-1}\cdot\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$I=-4\int\frac{\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}\cdot t^{-1}\cdot\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot t^2dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}}=-4\int\frac{\left(t^3-1\right)^2\cdot\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot t^2}{t\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}}dt=$$

$$=-4\int tdt=-\frac{4t^2}{2}+C=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(1+x^{-\frac{3}{4}}\right)^2}+C.$$

Завдання для аудиторної роботи:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-7\sqrt[3]{x}}$; **2.** $\int\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}dx$; **3.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+3}$; **4.** $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$;

5. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$; **6.** $\int\frac{\sqrt{36-x^2}}{x^2}dx$; **7.** $\int\frac{dx}{\left(9+x^2\right)^3}$.

Відповіді:

1. $3\sqrt[3]{x}+21\ln\left|\sqrt[3]{x}-7\right|+C$; **2.** $-\sqrt{6+x-x^2}+5\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}+C$;

3. $\frac{3}{2}t^2-9t+27\ln|t+3|+C,$ де $t=\sqrt[3]{x-2}$;

4. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$;

5. $\frac{1}{6}\arccos\frac{3}{x}-\frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2}+C$; **6.** $-\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{6}\right)}-\arcsin\frac{x}{6}+C$;

7. $\frac{1}{972}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)+C$, де $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

Завдання для самостійної роботи:

1. $\int\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}dx$; **2.** $\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$; **3.** $\int\frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$;

4. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; **5.** $\int \frac{x^2}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}\,dx$; **6.** $\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^2}$;

7. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$; **8.** $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2} dx$; **9.** $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

Відповіді:

1. $x-6\sqrt{x}+18\ln\left|3+\sqrt{x}\right|+C$; **2.** $6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C$;

3. $\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2}+\sqrt[3]{(3x+4)}-\ln\left|\sqrt[3]{(3x+4)}+1\right|+C$;

4. $2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C$, де $t=\arcsin\frac{x}{2}$; **5.** , $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+C$;

6. $\frac{1}{250}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$, де $t=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{5}$;

7. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$; **8.** $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C$;

9. $-\frac{1}{8}\cdot\frac{4+3x^3}{x\left(2+x^3\right)^{2/3}}+C.$

Література:

[3], гл. 4, с. 196–200;
[4], гл. 5, §8, с. 243–246;
[5], гл. 10, §10, §11, §13, с. 360–364, 369–370;
[6], гл. 7, §5, с. 318–320, 321–323.

Контрольна робота
(приклади варіантів контрольної роботи)

Варіант 1

1. $\int \frac{dx}{x(2\ln x+5)}$;

2. $\int (3x+4)\sin\frac{x}{2}\,dx$;

3. $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+5}\,dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{2x-3}\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$;

5. $\int \cos^2 4x\,dx$;

6. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

7. $\int \frac{5x-1}{x(x+1)^2}\,dx$.

Варіант 2

1. $\int x\sin(3x^2-1)\,dx$;

2. $\int (5-2x)e^{-4x}\,dx$;

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

4. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+7}$;

5. $\int \sin^2 3x\,dx$;

6. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$;

7. $\int \frac{13x+6}{x^3+x}\,dx$.

Варіант 3

1. $\int x5^{x^2-4}dx$;

2. $\int (2x-1)e^x dx$;

3. $\int \frac{x+2}{x^2-2x+10}dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$;

5. $\int \cos^3 2x\,dx$;

6. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

7. $\int \frac{3x+2}{x^2(x-3)}dx$.

Варіант 4

1. $\int x\cos(3-5x^2)dx$;

2. $\int (1-x)\cos 5x\,dx$;

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1}$;

5. $\int \sin^3 7x\,dx$;

6. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;

7. $\int \frac{x+3}{x^3-4x}dx$.

ДОДАТКИ

1. Таблиця похідних елементарних функцій

$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, де n – будь яке дійсне число;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$;

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, x \in R$;

$\left(e^x\right)' = e^x, x \in R$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, x > 0$;

$(\sin x)' = \cos x, x \in R$;

$(\cos x)' = -\sin x, x \in R$;

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in Z$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$;

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in R$;

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in R$;

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, x \in R;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, x \in R.$$

2. Основні правила диференціювання:

$$[C]' = 0;$$

$$[Cu(x)]' = C[u(x)]';$$

$$[u(x) \pm v(x)]' = [u(x)]' \pm [v(x)]';$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = [u(x)]' \cdot v(x) + u(x) \cdot [v(x)]';$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{[u(x)]' \cdot v(x) - u(x) \cdot [v(x)]'}{v^2(x)}, v(x) \neq 0,$$

де C – стала, а $u(x)$ та $v(x)$ – такі функції, що мають похідні.

3. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$$

$$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C;$$

$$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C;$$

$$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C \ ;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| + C \ ; \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \, .$$

4. Основні властивості невизначеного інтеграла:

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx \ ; \ \int dF(x) = F(x) + C \ ;$$

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \ ;$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \ .$$

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, де C – стала.

5. Деякі тригонометричні формули:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ ; \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ ;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \ ; \ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \ ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \ ;$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right];$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right];$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right].$$

6. Квадратні рівняння:

Корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходять за формулою $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, D=b^2-4ac\geq 0$,

або за теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

Квадратний тричлен ax^2+bx+c можна розкласти на множники $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де x_1, x_2 − корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення:

$a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$;

$a^3\pm b^3=\left(a\pm b\right)\left(a^2 \mp ab+b^2\right)$;

$\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$\left(a\pm b\right)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1972; 1977; 1985.– 416 с.

2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

3. Высшая математика: Программа, методические указания и контрольные задания для студентов всех специальностей заочного обучения. Ч.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной, функции многих переменных, дифференциальные уравнения и системы / Под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 296 с.

4. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие в 2-х частях / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Ч.1.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 324 с.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. / Н.С. Пискунов.– М.: Наука, 1970; 1985. – Т.I. – 456с.

6. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Наука, Высшая школа, 1978. – 640 с.

7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до проведення практичних занять з вищої математики за темою
«Невизначений інтеграл»
для викладачів та студентів усіх спеціальностей
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ

Укладачі: ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна,
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

Відповідальний за випуск проф. Геворкян Ю. Л.

Роботу до видання рекомендувала проф. Л. В. Курпа
В авторській редакції

План 2018 р., поз. 18

Підп. до друку 10 . 01 .2018. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.3,0.
Наклад 50 прим. Зам. № . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.