МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.І. Першина, О.П. Пріщенко,

Н.В Черемська, Т.Т. Черногор

ПОДВІЙНИЙ ТА ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛИ

Навчальний посібник
з курсу вищої математики

для студентів та викладачів усіх спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 28.01.2022

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

УДК 517.3(075)
П 44

Рецензенти:
О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, проф. УІПА
І. К. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф. ХНАДУ

Подвійний та потрійний інтеграли : навч. посіб. / Першина Ю.І.,
П 44 Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. - 106 с.

ISBN 978-617-7988-88-4

Навчальний посібник присвячений одній з найважливіших тем математичного аналізу – подвійним та потрійним інтегралам. Складається з чотирьох частин. У перших двох частинах докладно висвітлюється теоретичний матеріал з кратних інтегралів. У третій та четвертій частині посібника розглянуто завдання, пов'язані з обчисленням подвійних та потрійних інтегралів. Посібник також містить завдання для самостійної роботи

Призначено для студентів та викладачів усіх спеціальностей.

Іл. 63. Бібліогр.: 6 назв.

ISBN 978-617-7988-88-4

УДК 517.3(075)

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник присвячений одній з найважливіших тем математичного аналізу – подвійним та потрійним інтегралам. Дана розробка буде корисною для отримання додаткових знань з представлених на лекціях та практичних заняттях тем з метою глибшого самостійного вивчення інтегрального обчислення функції декількох змінних.

Засвоєння студентами знань з вищої математики та вміння застосовувати їх на практиці є важливими елементами навчального процесу. Знання, набуті в процесі самостійної роботи, можуть бути ефективно використані в подальшому навчанні і практичній діяльності. Тому посібники, які орієнтовані на самостійну роботу студентів, актуальні.

Сучасна навчальна програма, нажаль, відводить мало часу на вивчення теми «Подвійний та потрійний інтеграли», цей навчальний посібник призначений для студентів, які вивчають вищу математику у скороченому обсязі.

Робота складається з чотирьох частин. У перших двох частинах докладно висвітлюється теоретичний матеріал з кратних інтегралів. У третій та четвертій частині посібника розглянуто завдання, пов'язані з обчисленням подвійних та потрійних інтегралів. У посібнику розбираються такі теми, як розстановка меж інтеграції у подвійних інтегралах, перехід у подвійному інтегралі до полярних координат. Розглянуто задачі, пов'язані з обчисленням потрійних інтегралів у декартових, циліндричних та сферичних координатах. Розібрані завдання на геометричні та механічні застосування кратних інтегралів – обчислення площ та обсягів тіл, обчислення маси, координат центру тяжкості, статичних моментів та моментів інерції тел. По кожній із тем посібник містить завдання для самостійного розв’язання

Контекст учбового матеріалу відповідає програмі навчання студентів технічних спеціальностей, що може сприяти підвищенню зацікавленості і мотивації у вивченні цієї теми.

Для полегшення самостійної роботи подано список рекомендованої літератури, в якій читачі можуть знайти відповіді на свої запитання. До цього списку увійшли як традиційні класичні підручники, так і навчально-методичні видання кафедри.

Слід зазначити графічне оформлення посібника рисунками, які допоможуть при розв’язанні задач. Короткий довідник, який містить формули скороченого множення, таблиці похідних та невизначених інтегралів основних функцій, який наведено наприкінці, стане у пригоді студентам при вивчені даної теми.

Головне призначення посібника – допомогти студентам в самостійному вивченні даних розділів курсу вищої математики в умовах скороченої кількості аудиторних занять. Посібник може стати в нагоді також студентам заочного відділення та студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом та для молодих викладачів без достатнього досвіду роботи.

Автори

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Подвійний інтеграл. Основні поняття та визначення

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області D площини Oxy (рисунок 1.1). Будемо вважати, що межа L області D складається із скінченного числа неперервних кривих. Розіб'ємо область D на n довільних частинних областей D_i, які не мають спільних внутрішніх точок. Площі областей D_i позначимо відповідно ΔS_i, а їх діаметри d_i.

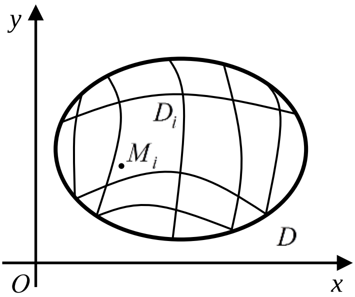

Рисунок 1.1

Діаметром d_i області D_i називається довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області. В кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$, помножимо значення функцій $f(x_i, y_i)$ в цій точці на ΔS_i та розглянемо суму

$$f(x_1, y_1)\cdot\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\cdot\Delta S_2 + \cdots + f(x_n, y_n)\cdot\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta S_i,$$

яка носить назву *інтегральної суми*.

Границя інтегральної суми, якщо вона існує, за умови, що $\max d_i \to 0$, тобто $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i, ні від вибору точки $M_i(x_i, y_i)$, називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області D.

Подвійний інтеграл позначається так:

$$\iint_D f(x,y)dS, \quad \iint_D f(x,y)dxdy, \quad \iint_D f(M)dS,$$

при цьому область D називається *областю інтегрування*, dS або $dxdy$ – *диференціалом площі*.

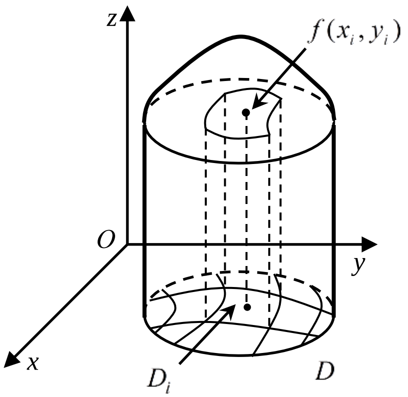

Рисунок 1.2

Теорема 1.1. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D.

Геометричний зміст подвійного інтеграла

Розглянемо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, знизу – замкненого областю D площини *Oxy*, з боків – циліндричною поверхнею з твірною – паралельною осі Oz, а напрямною є межа області D. Таке тіло називається *циліндричним* (рисунок 1.2).

Складемо для функції $f(x,y)$ інтегральну суму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ при цьому кожний доданок в інтегральній сумі визначає об'єм елементарного паралелепіпеда з основою D_i та висотою $f(x_i, y_i)$, тобто $\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

Тоді об’єм циліндричного тіла:

$$V \approx \sum_{i=1}^{\infty} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i \ .$$

Ця рівність буде тим точніша, чим більша кількість n та чим менші розміри елементарних областей D_i.

Якщо кількість областей D_i необмежено збільшується $(n \to \infty)$, а кожна область D_i стягується в точку, то за об’єм циліндричного тіла приймаємо величину

$$V = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i = \iint_D f(x, y) dx dy \ .$$

Отже, геометричний зміст подвійного інтеграла від невід’ємної функції є об’єм циліндричного тіла.

Зокрема, якщо вважати $f(x, y) = 1$, то значення подвійного інтеграла буде дорівнювати площі області D:

$$S = \iint_D dx dy \ .$$

Фізичний зміст подвійного інтеграла

Знайдемо масу плоскої пластини, якщо відома її поверхнева густина $\rho(x, y)$. Розіб’ємо область D на n довільних частинних областей D_i, площі яких відповідно дорівнюють ΔS_i. В кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ та обчислимо в ній густину $\rho(x, y)$. Якщо області D_i малі, тоді наближено можна вважати, що густина в кожній точці $(x, y) \in D$ мало відрізняється від значень $\rho(x_i, y_i)$ та маса частинної області буде $m_i \approx \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Тоді масу всієї пластини можна записати $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Точне значення маси одержимо за умови $n \to \infty$.

Таким чином, фізичний зміст подвійного інтеграла є маса плоскої області D

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy\ .$$

Слід підкреслити, що густина $\rho(x,y)=1$ за умові, що пластина однорідна.

Властивості подвійного інтеграла

1. ***Лінійність***. Якщо функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ інтегровані в області D, то функція $\lambda_1 f_1(x,y)+\lambda_2 f_2(x,y)$, де λ_1, λ_2 – довільні дійсні числа, також інтегрована в області D, причому

$$\iint_D \left(\lambda_1 f_1(x,y)+\lambda_2 f_2(x,y)\right)dxdy=\lambda_1\iint_D f_1(x,y)dxdy+\lambda_2\iint_D f_2(x,y)dxdy\ .$$

2. ***Адитивність.*** Якщо область D розбита на дві підобласті D_1 та D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, і функція $f(x,y)$ інтегрована в D, тоді вона інтегрована в D_1 і D_2 та виконується рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy\ .$$

3. ***Інтегрування нерівності.*** Якщо функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ інтегровані в D і в кожній точці області D $f_1(x,y)\geq f_2(x,y)$, то $\iint_D f_1(x,y)dxdy\geq\iint_D f_2(x,y)dxdy$.

4. ***Обмеженість інтеграла***. Якщо функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ інтегровані в D і в кожній точці області D $m\leq f(x,y)\leq M$, то

$$m\cdot S_D\leq\iint_D f(x,y)dxdy\leq M\cdot S_D\ ,$$

де S_D – площа області D,

m – найменше значення функції $f(x,y)$ області D,

M – найбільше значення функції $f(x,y)$ області D.

5. ***Теорема про середнє значення.*** Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D, то існує така точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, що

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(M_0) \cdot S_D .$$

1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Область D (рисунок 1.3) називається *правильною* у напрямі осі Oy, якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області D, паралельно осі Oy, перетинає межу області в двох точках M і N.

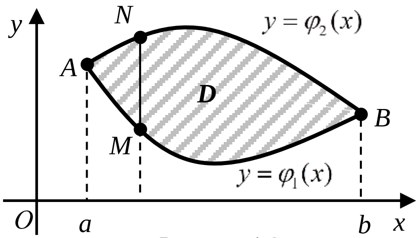

Рисунок 1.3

При такому завданні області D подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (1)$$

Інтеграл $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ називається *повторним* або *двократним*, при цьому інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ називається *внутрішнім*. В цьому інтегралі інтегрування ведеться за змінною y, а x вважається сталою величиною. Отже,

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx .$$

Область D (рисунок 1.4) називається *правильною* у напрямі осі Ox, якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області D, паралельно осі Ox, перетинає межу області в двох точках M і N.

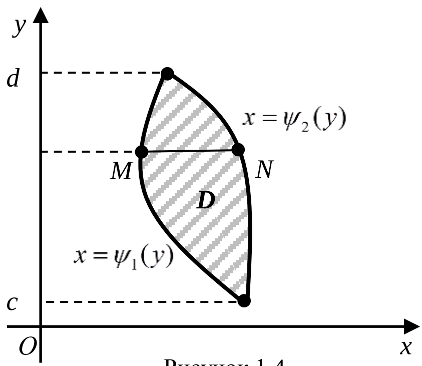

Рисунок 1.4

Тоді подвійний інтеграл по області D обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Інтеграл $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ називається *повторним* або *двократним*, при цьому інтеграл $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ називається *внутрішнім*. В цьому інтегралі інтегрування ведеться за змінною x, а y вважається сталою величиною. Отже,

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy .$$

Слід підкреслити, що інтеграли (1) та (2) рівноправні. У випадку, якщо область D правильна у напрямі осі Ox та осі Oy, то справедливі формули (1) і (2).

Якщо їх порівняти, то маємо

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3)$$

Перехід від лівої частини формули (3) до правої і навпаки називається *зміною порядку інтегрування*.

Зауваження 1. При обчисленні подвійних інтегралів рисунок області є обов'язковим, оскільки він дасть змогу вірно розставити межі інтегрування заданої області.

Зауваження 2. Якщо область D не є правильною ні у напрямі осі Ox, ні у напрямі осі Oy, то таку область необхідно розбити на області, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі Ox чи осі Oy.

Зауваження 3. У кожному конкретному випадку, залежно від області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень та при якому не потрібно розбивати область інтегрування на частини.

Приклад 1. Обчислити $\iint \frac{x^2}{y^2} dxdy$, D – область, обмежена прямими $x=2$, $y=x$ та гіперболою $xy=1$.

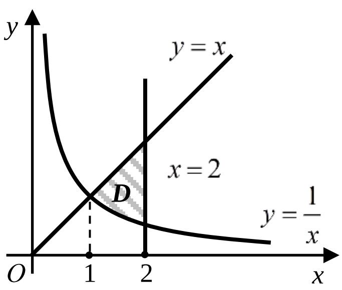

Рисунок 1.5

Розв'язання. Область інтегрування правильна у напрямі осі Oy (рисунок 1.5). Можна записати $1 \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le x$. Отже,

$$\iint \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int_1^2 \left(x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_1^2 x^2 \left(\frac{-1}{y} \right) \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx = \int_1^2 \left(-x + x^3 \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = 4 - \frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$

Відповідь: $\frac{9}{4}$.

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x, y)dy$.

Розв'язання. Щоб змінити порядок інтегрування, треба поновити область інтегрування D в подвійному інтегралі (рисунок 1.6). Вона обмежена лініями $x = 1$, $x = -1$, $y = x^2$, $y = 1$.

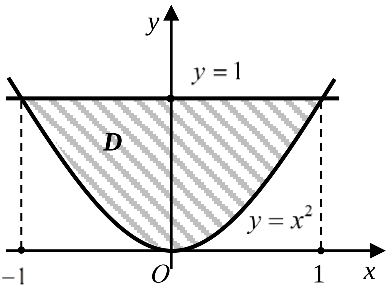

Рисунок 1.6

Запишемо подвійний інтеграл повторним при іншому порядку змінних інтегрування.

Область D опукла в напрямку осі Ox. Проекцією D на вісь Oy є сегмент $\left[0,1\right]$. Розв'язки рівняння $y=x^2$ відносно x задають рівняння лівої $x=-\sqrt{y}$ та правої $x=\sqrt{y}$ меж області D.

Таким чином, маємо

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx .$$

1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у декартовій прямокутній системі координат xOy. Припустимо, що змінні x та y є функціями незалежних змінних U та V, тобто $\begin{cases} x = x(U,V), \\ y = y(U,V). \end{cases}$

Якщо ці функції є неперервно диференційовані та встановлюють взаємно-однозначну відповідність обмеженої та замкнутої області D площини xOy на область D' площини UOV і визначник

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U} & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0 , \tag{4}$$

то має місце *загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\left(x(U,V),\, y(U,V)\right)\cdot\left|I(U,V)\right| dUdV. \tag{5}$$

При цьому визначник (4) називається *визначником Якобі* або *якобіаном.* Координати (U,V) називаються *криволінійними координатами точки* (x,y).

Ціль заміни змінних – спрощення обчислення подвійного інтеграла.

1.4. Перехід до полярних координат у подвійному інтегралі

Важливим окремим випадком криволінійних координат є полярні координати (ρ,φ). Прямокутні декартові координати x та y і полярні координати ρ та φ пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad (0\le\rho<+\infty;\ 0\le\varphi\le 2\pi).$$

Якобіан перетворення в цьому випадку:

$$I(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho,$$

а формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі набуває вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho d\varphi,$$

де область D задана в декартовій системі координат xOy, а область D' – відповідна їй область у полярній системі координат.

Перехід до полярних координат має сенс в тих випадках, коли область інтегрування є круг, кільце або їх частина, а також у випадку, коли підінтегральна функція має вигляд $f\left(x^2+y^2\right)$. В полярних координатах вираз $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$. Межею круга є коло $x^2+y^2=R^2$ і його рівняння в полярних координатах набуває вигляду $\rho=R$.

Слід зазначити, що інколи доцільніше користуватись так званими узагальненими полярними координатами, які зв'язані з декартовими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi, \\ y=b\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad (0\le\rho<+\infty;\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ a>0,\ b>0).$$

В даному випадку $\left|I\right| = ab\rho$, а формула переходу до узагальнених полярних координат має вигляд:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\cdot ab\rho d\rho d\varphi,$$

де область D задана в декартовій системі координат xOy, а область D' – відповідна їй область в узагальненій полярній системі координат.

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}dxdy$, якщо область D обмежена кругом $x^2 + y^2 = a^2$, що лежить в I чверті, та прямими $y = x$ та $y = \sqrt{3}\cdot x$.

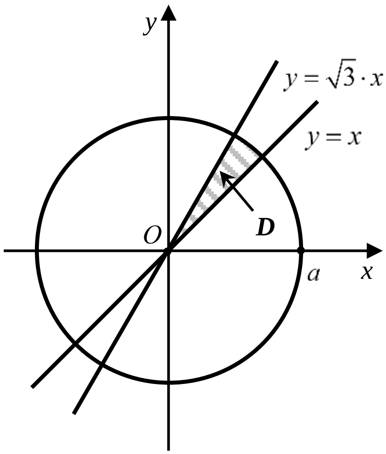

Рисунок 1.7

Розв'язання. Область D зображена на рисунку 1.7. Запишемо її межі в полярних координатах: рівняння кола має вигляд $\rho = a$, а відрізки прямих $y = x$ та $y = \sqrt{3}\cdot x$ є променями $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Таким чином,

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \iint_{D'} e^{\rho^2}\cdot\rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^a e^{\rho^2}\cdot\rho d\rho = \varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_0^a =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2}\left(e^{a^2}-e^0\right) = \frac{\pi}{12}\left(e^{a^2}-1\right).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{12}\left(e^{a^2}-1\right)$.

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, де область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі зручно скористатись так званими узагальненими полярними координатами:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \text{ де } |I| = ab\rho .$$

За таких умов підінтегральна функція набуває вигляду:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}} =$$

$$= \sqrt{1-\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Таким чином

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\varphi d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi, \text{ рівняння еліпса} \\ \text{набуває вигляду } \rho = 1, \\ \text{отже, } 0 \le \rho \le 1 \end{array} \right| = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= ab\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^1 d\varphi = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ab}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi ab}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2\pi ab}{3}$

1.5. Геометричні застосування подвійного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

Площа S плоскої області D на площині xOy обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D dxdy$$

Обчислення об'єму тіла

Об'єм циліндричного тіла V, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини xOy, а зверху – поверхнею σ: $z = f(x, y) \geq 0$ в області D, $\text{пр}_{xOy}\sigma = D$ (рисунок 1.8), обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

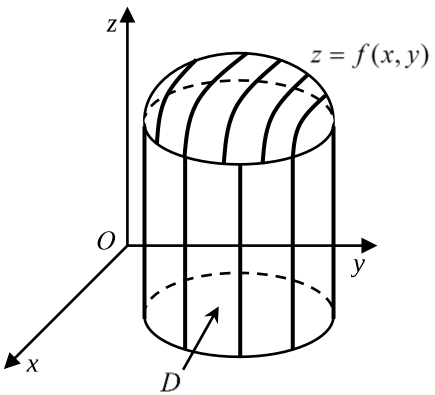

Рисунок 1.8

Якщо тіло обмежене знизу поверхнею з рівнянням $z = f_1(x, y)$, зверху – поверхнею з рівнянням $z = f_2(x, y)$, а проекція верхньої та нижньої поверхонь на площину xOy є областю D (рисунок 1.9), то об'єм тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_{D} \left(f_2(x, y) - f_1(x, y) \right) dxdy .$$

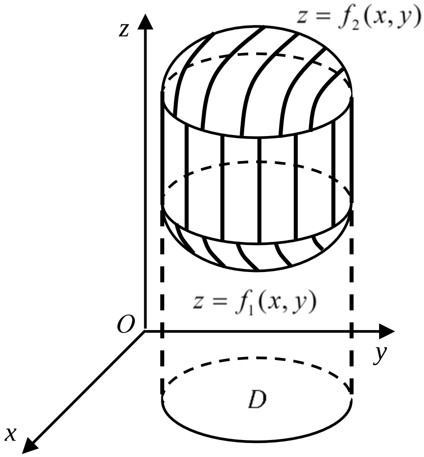

Рисунок 1.9

Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня σ задається рівняння $z = f(x, y)$ і її проекція на площину xOy є замкнена область, то площа S_σ поверхні σ обчислюється за формулою:

$$S_\sigma = \iint \sqrt{1 + \left(f'_x(x, y) \right)^2 + \left(f'_y(x, y) \right)^2} dxdy .$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{3}{2}x$, $x = 0$, $y = 4 - (x - 2)^2$.

Розв'язання. Спочатку зробимо необхідне креслення. Дана область приведена на рисунку 1.10.

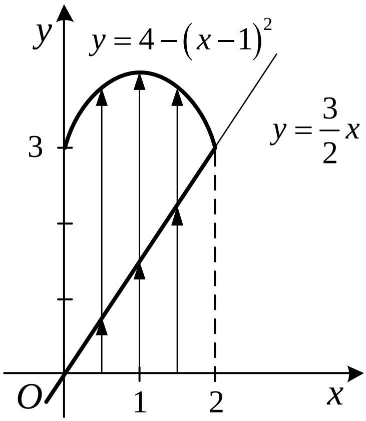

Рисунок 1.10

Її проекція на вісь Ox є відрізок $[0, 2]$, точки входу в область належать прямій $y=\frac{3}{2}x$, а точки виходу лінії $y=4-(x-2)^2$.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}dy=\int\limits_0^2\left(4-(x-1)^2-\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{13}{3}.$$

Відповідь: $\frac{13}{3}$.

Приклад 6. Знайти об'єм тіла V, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та площинами $x+z=4$, $z=0$.

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху площиною $x+y=4$, знизу площиною $z=0$ і з боків прямими циліндрами $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$ (рисунок 1.11).

Область інтегрування $D=\text{пр}_{xOy}V$ зображене на рисунку 1.12. Змінна x змінюється від 0 до 4, тобто $0\le x\le 4$, при будь-якому значенні з цього проміжку $\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}$. Крім того, $z=4-x$.

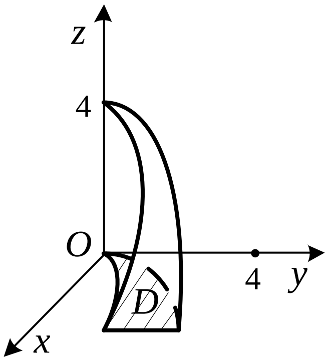

Рисунок 1.11

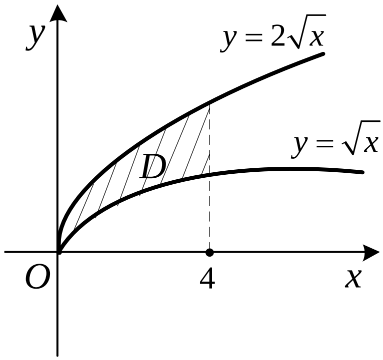

Рисунок 1.12

Отже,

$$V=\iint\limits_D (4-x)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=\int\limits_0^4 (4-x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int\limits_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx=\int\limits_0^4\left(4x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{128}{15}.$$

Відповідь: $\frac{128}{15}$.

Приклад 7. Знайти площину частини сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що міститься в середині циліндра $x^2+y^2=ay$ $(x\le 0,\ y\le 0,\ z\le 0)$.

Розв'язання. Частина сфери, що знаходиться в I октанті і міститься в середині циліндра, що проектується у півкруг, обмежений колом $x^2+y^2=ay$ та віссю Oy (рисунок 1.13, 1.14).

З рівняння сфери маємо:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};\ z'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Отже, $S=\iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.

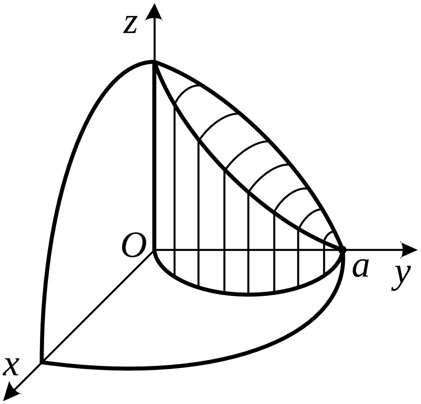

Рисунок 1.13

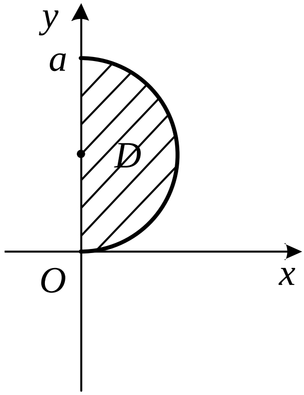

Рисунок 1.14

Перейдемо до полярних координат. Врахуємо, що рівняння кола прийме вигляд $\rho=a\cdot\sin\varphi$.

$$S=a\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\rho\le a\sin\varphi, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right|=a\iint\limits_{D'}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=$$

$$=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\rho^2}\Bigg|_0^{a\sin\varphi}d\varphi=-a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-1)d\varphi=$$

$$=-a^2(\sin\varphi-\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Відповідь: $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

1.6. Фізичні застосування подвійного інтеграла

Обчислення маси матеріальної пластинки

Якщо пластинка лежить у площині xOy та має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\gamma = \gamma(x, y)$, то маса m пластинки обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dxdy .$$

Обчислення середньої густини матеріальної пластинки

Якщо маса пластинки дорівнює m, а її площа S, то середня густина пластинки:

$$\mu_{сер} = \frac{m}{S} = \frac{\iint_D \gamma(x, y) dxdy}{\iint_D dxdy} ,$$

де $\gamma(x, y)$ – густина пластинки у кожній точці.

Обчислення статичних моментів пластинки

Статичні моменти пластинки D відносно осей Ox та Oy знаходяться за формулами:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dxdy, \; M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dxdy .$$

У випадку, якщо пластина однорідна, то $\gamma = \text{const}$.

Обчислення координат центра ваги пластинки

Координати центра ваги $C(x_C, y_C)$ пластинки обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} ,$$

де m – маса пластинки, а M_x та M_y – її статичні моменти відносно координатних осей.

Якщо пластинка однорідна, то ці формули набувають вигляду:

$$x_C = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S}, \quad y_C = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S},$$

де S – площа області D.

Обчислення моментів інерції пластинки

Моменти інерції пластинки D відносно осей Ox та Oy знаходяться за формулами:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy,$$

а момент інерції відносно початку координат за формулою:

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy = I_x + I_y .$$

Приклад 8. Знайти момент інерції рівнобедреного прямокутного трикутника відносно гіпотенузи довжини $2a$, якщо в кожній точці його поверхнева густина пропорційна відстані точки до гіпотенузи.

Розв'язання. Нехай гіпотенуза заданого трикутника ABC розміщена на осі Ox і ділиться початком координат пополам (рисунок 1.15).

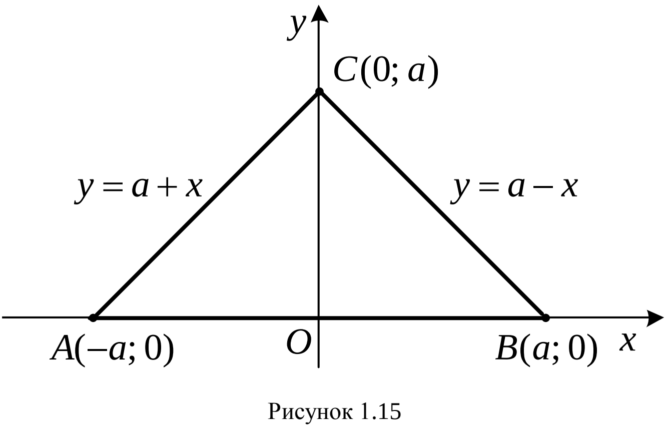

Рисунок 1.15

Рівняння катетів AC і CB будуть відповідно $y = a + x$ та $y = a - x$, або $x = y - a$ та $x = a - y$.

Густина $\gamma(x, y) = ky$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Шуканий момент інерції відносно гіпотенузи буде моментом інерції відносно осі Ox, тобто

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) dxdy = \iint_D k \cdot y^3 dxdy = \left| \begin{array}{l} \text{В даному випадку доцільно} \\ \text{область } D \text{ спроектувати на} \\ \text{вісь } Oy, \text{ тоді обчислення ін-} \\ \text{тегралу буде значно простіше} \end{array} \right| =$$

$$= k\int_0^a y^3 dy \int_{y-a}^{a-y} dx = k\int_0^a y^3 \cdot x \Big|_{y-a}^{a-y} dy = k\int_0^a y^3 (a - y - y + a) dy = 2k\int_0^a y^3 (a - y) dy =$$

$$= 2k\left(a\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^a = 2k\left(\frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{5} \right) = \frac{2ka^5}{20} = \frac{ka^5}{10}.$$

Відповідь: $\frac{ka^5}{10}$.

Приклад 9. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно осей координат і центр ваги однорідної пластинки D, обмеженої кривою $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ та віссю Ox $(y = 0)$.

Розв'язання. Враховуючи той факт, що пластинка однорідна, можна записати $\gamma(x, y) = 1$.

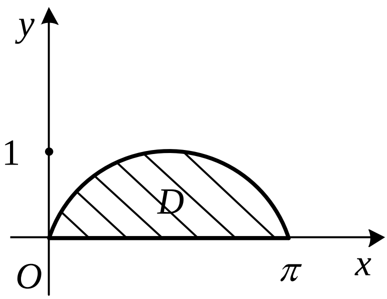

Рисунок 1.16

Зробимо відповідне креслення (рисунок 1.16). Тоді:

$$M_x = \iint_D y dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^{\pi} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{\sin x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідно,

$$M_y = \iint_D x dx dy = \int_0^{\pi} x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} x \left(y \Bigg|_0^{\sin x} \right) dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi.$$

Знайдемо площу заданої пластинки:

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Bigg|_0^{\pi} = 2.$$

Таким чином, $x_C = \dfrac{M_y}{S} = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad y_C = \dfrac{M_x}{S} = \dfrac{\pi}{8}$.

Відповідь: $M_x = \dfrac{\pi}{4}$, $M_y = 2$; $\quad x_C = \dfrac{\pi}{2}$, $y_C = \dfrac{\pi}{8}$.

2. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Основні означення

Розглянемо у тривимірному просторі R^3 скінченну замкнену область G з кусково-гладкою межею та функцію $U = f(x, y, z)$, що задана в цій області. Розіб'ємо область G на n довільних частинних областей G_i, які не мають спільних внутрішніх точок. Об'єми областей G_i позначимо ΔV_i, їх діаметри – d_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Діаметром d_i області G_i називається довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області G_i.

Розглянемо довільну точку $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$ та знайдемо значення функції $f(x, y, z)$ в точці P_i.

Вираз $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$ називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області.

Позначимо через λ максимальний із діаметрів d_i областей G_i, тобто $\lambda = \max d_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Якщо існує границя інтегральної суми I_n за умови, що $\lambda \to 0$, тобто $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частинні області G_i, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i, z_i)$, то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області G.

Потрійний інтеграл позначається так:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV, \quad \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz, \quad \iiint\limits_G f(P)dV.$$

Отже, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i.$$

Теорема 2.1. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то існує потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області G.

Властивості потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл має ті ж самі властивості, що й подвійний інтеграл.

1. ***Лінійність***. Якщо функції $f_1(x,y,z)$ та $f_2(x,y,z)$ інтегровані в області G, то функція $\lambda_1 f_1(x,y,z)+\lambda_2 f_2(x,y,z)$, де λ_1, λ_2 – довільні дійсні числа, також інтегрована в області G, причому

$$\iiint\limits_G \left(\lambda_1 f_1(x,y,z)+\lambda_2 f_2(x,y,z)\right)dV=\lambda_1\iiint\limits_G f_1(x,y,z)\,dV+\lambda_2\iiint\limits_G f_2(x,y,z)\,dV.$$

2. ***Адитивність.*** Якщо область G розбита на дві підобласті G_1 та G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, і функція $f(x,y,z)$ інтегрована в G, тоді вона інтегрована в G_1 і G_2 та виконується рівність

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dV+\iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dV\,.$$

3. ***Інтегрування нерівності.*** Якщо функції $f_1(x,y,z)$ та $f_2(x,y,z)$ інтегровані в G і в кожній точці області G $f_1(x,y,z)\geq f_2(x,y,z),$ то $\iiint\limits_G f_1(x,y,z)\,dV\geq\iiint\limits_G f_2(x,y,z)\,dV$.

4. ***Обмеженість інтеграла***. Якщо функції $f_1(x,y,z)$ та $f_2(x,y,z)$ інтегровані в G і в кожній точці області G $m\leq f(x,y,z)\leq M$, то

$$m\cdot V_G\leq\iiint\limits_G f(x,y,z)dV\leq M\cdot V_G\,,$$

де V_G – об’єм області G,

m – найменше значення функції $f(x,y,z)$ області G,

M – найбільше значення функції $f(x,y,z)$ області G.

5. ***Теорема про середнє значення.*** Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області G, то існує така точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$, що

$$f\left(M_0\right) = \frac{1}{V_G} \iiint_G f\left(M\right) dV .$$

2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Якщо будь-яка пряма, що проходить через внутрішню точку області G паралельно осі Oz, перетинає границю області G у двох точках, а проекція G на площину xOy є правильною областю D, то область G називається *правильною* у напрямі осі Oz.

Аналогічно вводиться означення правильної області у напрямах осей Ox та Oy.

Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x, y)$ та $z = z_2(x, y)$ відповідно, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Позначимо проекцію області G на площину xOy через область D, тобто $\text{пр}_{xOy} G = D$ (рисунок 2.1).

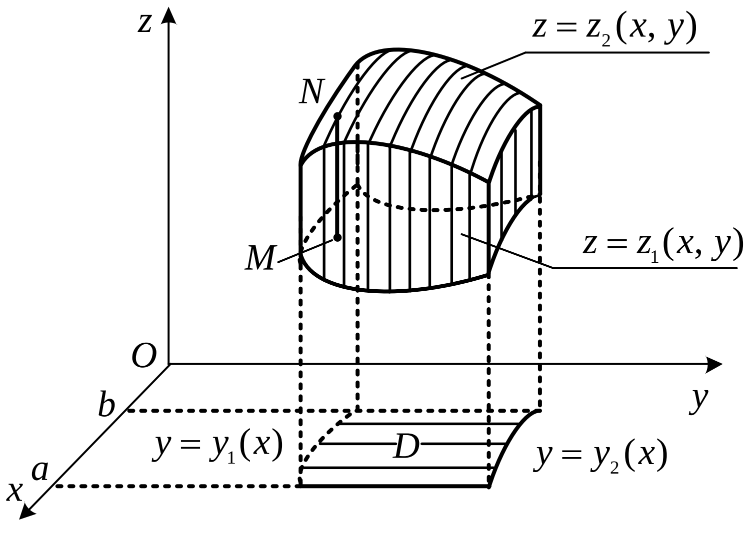

Рисунок 2.1

Припустимо, що кожна пряма, яка паралельна осі Oz і проходить через внутрішню точку області G, перетинає область G у точках M та N. Точку M назвемо точкою входу в область G, а точку N – точкою виходу з області, їхні аплікати позначимо відповідно $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих}}$. Тоді $z_{\text{вх}} = z_1(x, y)$, $z_{\text{вих}} = z_2(x, y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Тобто, щоб обчислити потрійний інтеграл, спочатку треба обчислити інтеграл $I(x, y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ за змінною z, вважаючи змінні x та y сталими. Цей інтеграл називають внутрішнім інтегралом, бо

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy. \qquad (6)$$

Права частина формули (6) є подвійним інтегралом по області D з підінтегральною функцією $I(x, y)$. Таким чином, формула (6) дає змогу звести потрійний інтеграл до подвійного інтеграла.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$, а $x \in [a, b]$, причому $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні в області D (рисунок 2.1) задана відповідно так:

$$z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y),$$
$$y_1(x) \le y \le y_2(x),$$
$$a \le x \le b,$$

то переходячи від подвійного інтеграла у формулі (6) до повторного, одержимо формулу

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (7)$$

Формула (7) зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Порядок інтегрування у формулі (7) може бути й іншим, тобто змінні x, y та z за певних умов можна міняти місцями.

Приклад 10. Обчислити потрійний інтеграл $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2+y^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^x dx = \frac{4}{2\cdot 3}\int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \frac{4}{2\cdot 3}\cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

2.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай задано дві системи координат $Oxyz$ і $Ouvw$, причому змінні x, y, z та u, v, w пов'язані між собою співвідношеннями :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \tag{8}$$

Формули (8) встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками областей G та G', розташованих відповідно у просторі xyz та uvw.

Якщо функції (8) задовольняють умові:

$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то має місце формула (9) – формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G'} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)\cdot|I|\cdot dxdydz, \quad (9)$$

де I – визначник Якобі або якобіан.

2.4. Циліндрична система координат

Визначимо положення точки M у просторі її декартовою координатою z і полярними координатами ρ і φ її проекції на M_1 на площину xOy (рисунок 2.2).

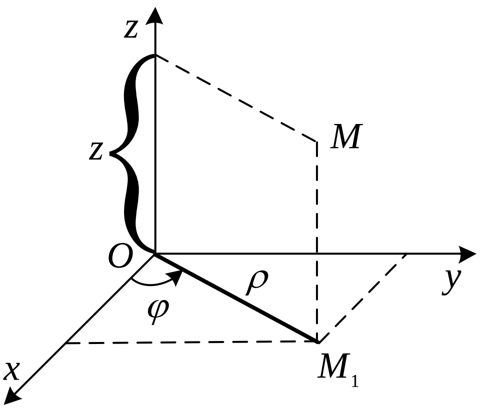

Рисунок 2.2

Величини ρ, φ, z називаються *циліндричними* координатами точки M.

З рисунка 2.2 видно, що циліндричні координати ρ, φ, z і декартові координати точки M пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$$\left(0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; -\infty < z < +\infty\right).$$

Якобіан перетворення I має вигляд:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

За формулою (9) маємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi dz,$$

де область G задана в декартовій системі координат, а область G' – відповідна їй область у циліндричній системі координат.

Приклад 11. Обчислити $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ якщо G – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=2x$ та площинами $y=0, z=0, z=a.$

Розв'язання.

Зробимо відповідне креслення (рисунки 2.3, 2.4).

Оскільки об'єм інтегрування є частина циліндра, має сенс перейти до циліндричних координат. Рівняння циліндра в цих координатах набуде вигляду

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi, \text{ або}$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2\rho\cos\varphi, \text{ тобто } \rho = 2\cos\varphi.$$

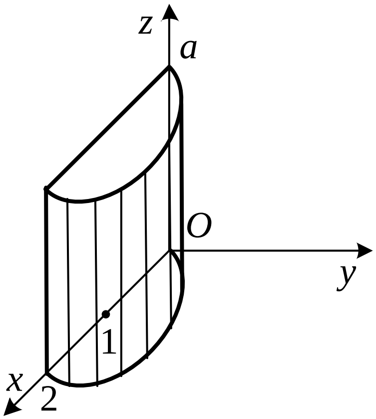

Рисунок 2.3

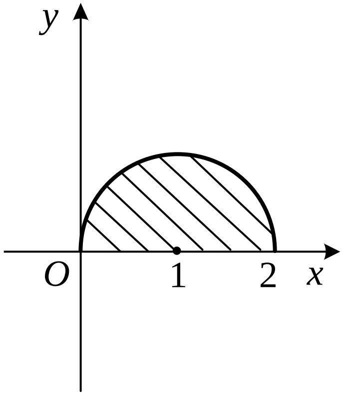

Рисунок 2.4

Отже, в області G координати ρ, φ, z змінюються таким чином:

$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi,$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

$$0 \le z \le a.$$

Тому

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^a z dz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}a^2\,\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4a^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}a^2.$$

Відповідь: $\frac{8}{9}a^2$.

2.5. Сферична система координат

Визначимо положення точки M у просторі за допомогою трьох величин, а саме: відстані ρ від початку координат O до точки M, кута φ між додатним напрямком осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину xOy (рисунок 2.5), кута θ між заданим напрямом осі Oz та відрізком OM.

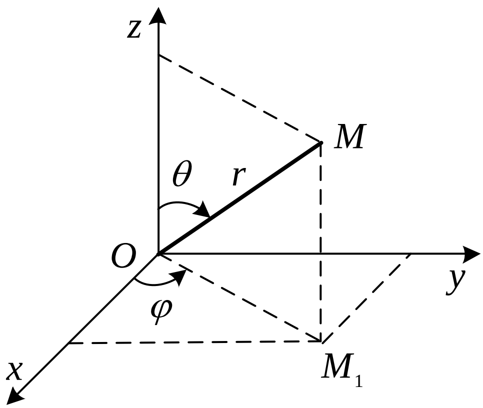

Рисунок 2.5

Величини ρ, φ, θ називаються *сферичними* координатами точки M. З рисунка 2.5 видно, що сферичні координати ρ, φ, θ і декартові координати точки M пов’язанні співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases}$$

$$\left(0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi\right).$$

Якобіан у сферичних координатах має вигляд:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \sin\theta & 0 & -\rho\sin\theta\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta.$$

Таким чином, за формулою (9) маємо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G'} f\left(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

де область G задана в декартовій системі координат, а область G' – відповідна їй область у сферичних координатах ρ, φ, θ.

Слід зазначити, що при обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних або сферичних координатах область G', як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G.

Приклад 12. Обчислити $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$ якщо G – область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z$.

Розв’язання.

Область G обмежена знизу та зверху сферою $x^2+y^2+z^2=z$ (рисунок 2.6).

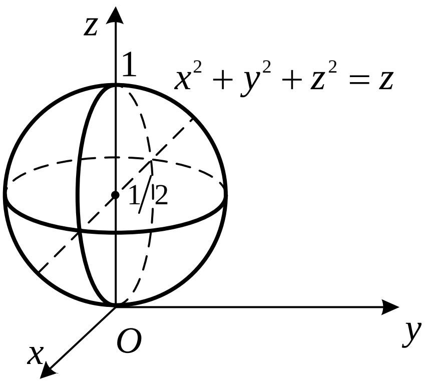

Рисунок 2.6

В сферичній системі координат $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, тому $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$.

Оскільки рівняння заданої сфери набуває вигляду: $\rho^2=\rho\cos\varphi$ або $\rho=\cos\varphi$, то

$$0\le\varphi\le 2\pi;$$
$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2};$$
$$0\le\rho<\cos\varphi.$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{1}{20}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{10}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{10}$.

2.6. Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об’єму тіла

Об’єм тіла $V\in R^3$ обчислюється за формулою:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

Обчислення маси матеріального тіла $V\in R^3$

Якщо матеріальне тіло V має об’ємну густину $\gamma=\gamma(x,y,z,)$, то маса тіла обчислюється за формулою:

$$m=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Середня густина тіла

Середня густина $\gamma_{сер}$ тіла V є відношення маси тіла до його об'єму, тобто:

$$\gamma_{сер} = \frac{m}{V} = \frac{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz},$$

де $\gamma(x,y,z,)$ – густина тіла V у кожній точці.

Статичні моменти тіла

Статичні моменти тіла V відносно координатних площин знаходимо за формулами:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\cdot\gamma dxdydz,\ M_{zx} = \iiint\limits_V y\cdot\gamma dxdydz,\ M_{xy} = \iiint\limits_V z\cdot\gamma dxdydz.$$

Координати центра ваги тіла

Координати центра ваги тіла V визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m},\quad y_c = \frac{M_{zx}}{m},\quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

де m – маса тіла V .

Моменти інерції тіла

Моменти інерції тіла V відносно осей координат відповідно знаходяться за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right)\gamma dxdydz,\ I_y = \iiint\limits_V \left(z^2+x^2\right)\gamma dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\gamma dxdydz.$$

Момент інерції тіла V відносно початку координат знаходиться за формулою:

$$I_o = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma dxdydz.$$

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1 Подвійний інтеграл в декартовій системі координат

Приклад 1. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy$;

б) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$;

в) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$.

Розв'язання.

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int\limits_0^1 x^2 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 \cdot \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Зауважимо, що у цьому прикладі внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування і тому він дорівнює сталій величині. А, отже, подвійний інтеграл перетворився на добуток двох визначених інтегралів.

б) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^{\ln y} e^x dx\right] dy = \int\limits_1^2 \left[e^x \Big|_0^{\ln y} \right] dy = \int\limits_1^2 \left(e^{\ln y} - e^0 \right) dy =$

$= \int\limits_1^2 (y-1) dy = \frac{(y-1)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}$.

в) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy = \int\limits_2^4 \left[\frac{1}{x} \int\limits_x^{2x} y dy \right] dx = \int\limits_2^4 \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 \frac{1}{x}\left(4x^2 - x^2\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_2^4 3x dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4 = \frac{3}{4}(16-4) = 9$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 9.

Приклад 2. Визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ для заданої області інтегрування D:

а) D – область, обмежена параболами $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

б) D – область, обмежена прямими $y = \dfrac{x}{2}$, $y + x = 2$, $x = 0$;

в) D – область, обмежена параболами $x = y^2$, $x = y^2 + 2$ та прямими $y = 0$ і $y = 2$.

а) *Розв'язання.* Для того, щоб з'ясувати межі інтегрування області D, спочатку необхідно зробити креслення (рисунок 3.1).

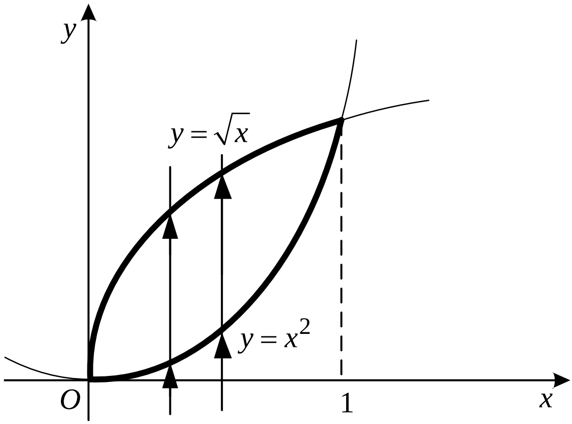

Рисунок 3.1

Спроектуємо область D на вісь Ox і, таким чином, визначимо межі інтегрування змінної x. Для цього розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$ та знайдемо розв'язок:

$$x^2 = \sqrt{x},\ x^4 = x,\ x\left(x^3 - 1\right) = 0, \text{ де } x_1 = 0 \text{ та } x_2 = 1.$$

Тобто, можна записати, що $0 \le x \le 1$.

Щоб визначити межі інтегрування змінної y, необхідно провести через область D 2 – 3 прямі, паралельно осі Oy так, щоб межу області D вони перетинали в двох точках, а потім рухались по цим прямим знизу догори. Очевидно, скільки б таких прямих ми не провели, що точки «входу» в область лежать на параболі $y = x^2$, а точки «виходу» – на параболі $y = \sqrt{x}$. Отже, $x^2 \le y \le \sqrt{x}$.

Таким чином, $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$.

Відповідь:

б) *Розв'язання.* Виконаємо відповідно до умови креслення (рисунок 3.2).

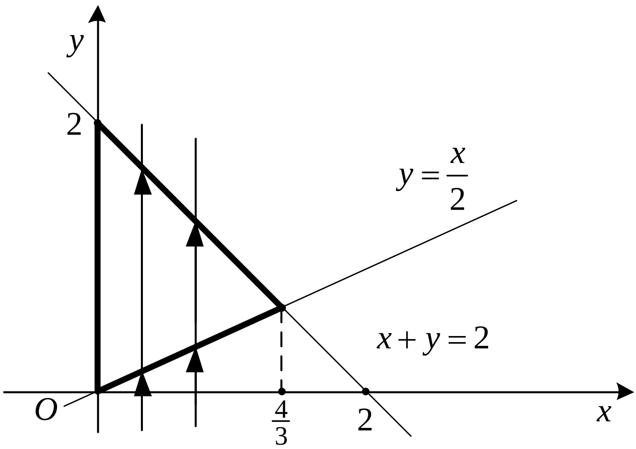

Рисунок 3.2

Спроектуємо область D на вісь Ox і, таким чином, визначимо межі інтегрування змінної x. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 2 - x, \\ y = \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Маємо $2-x=\frac{x}{2}$; $\frac{3}{2}x=2$; $x=\frac{4}{3}$. З рисунка видно, що $0\le x\le\frac{4}{3}$. Щоб визначити межі інтегрування змінної y, необхідно через область D провести 2 – 3 прямі, паралельні осі Oy так, щоб вони межу області D перетинали в двох точках, а потім рухатись по цим прямим знизу догори. Очевидно, що точки «входу» в область лежать на прямій $y=\frac{x}{2}$, а точки «виходу» – на прямій $y=2-x$.

Отже, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^{4/3}dx\int\limits_{x/2}^{2-x}f(x,y)\,dy$.

Відповідь:

в) *Розв'язання.* Виконаємо відповідно до умови креслення (рисунок 3.3).

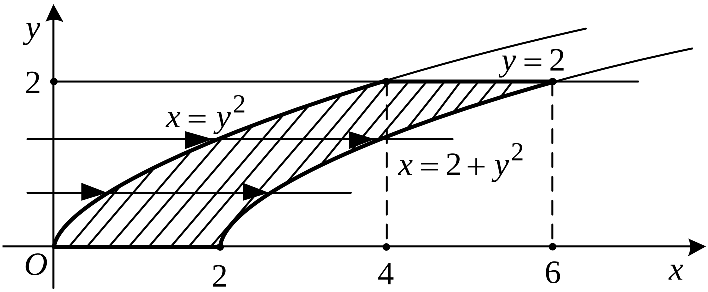

Рисунок 3.3

Якщо задану область спроектувати на вісь Ox, то при з'ясуванні межі інтегрування змінної y, область D доведеться розбивати на 3 області, що призведе до обчислення трьох подвійних інтегралів.

Але цю область можна спроектувати на вісь Oy. Тоді $0\le y\le 2$. Для з'ясування меж інтегрування змінної x проведемо 2 – 3 прямі, паралельні осі Ox так, щоб вони границю області перетинали в двох точках, та будемо рухатись по цим прямим зліва направо.

Очевидно, що точки «входу» в область лежать на параболі $x = y^2$, а точки в «виходу» з області – на параболі $x = y^2 + 2$.

Тобто, можна записати $y^2 \le x \le y^2 + 2$.

Отже, маємо: $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x, y)\,dx$.

Відповідь:

Як відомо, подвійний інтеграл не залежить від порядку інтегрування. Цією обставиною часто користуються при обчисленні подвійного інтегралу, обираючи ту з двох формул, яка призводить до більш простих обчислень.

Приклад 3. Обчислити подвійні інтеграли на заданій області D:

а) $\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy$, $D: \{y = x;\ y = 2x;\ x = 2, x = 3$;

б) $\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{y^2}\right) dxdy$, $D: \{x = 2;\ y = x;\ xy = 1$;

в) $\iint\limits_D \cos(x + y)\,dxdy$, $D: \{x = 0;\ y = \pi;\ y = x$.

а) *Розв'язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.4). З рисунка видно, що $2 \le x \le 3$, $x \le y \le 2x$.

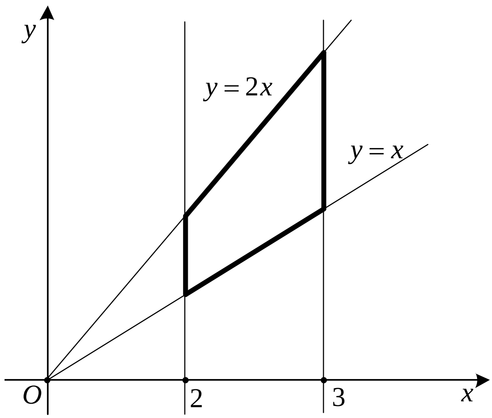

Рисунок 3.4

Обчислимо подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int\limits_2^3 \left(xy + y^2 \right)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int\limits_2^3 \left(\cancel{2x^2} - \cancel{x^2} + 4x^2 - \cancel{x^2} \right) dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dx = 4\cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{4\cdot 19}{3} = \frac{76}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{76}{3}$.

б) *Розв'язання.* З урахуванням відповідного креслення (рисунок 3.5), маємо:

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x. \end{cases}$$

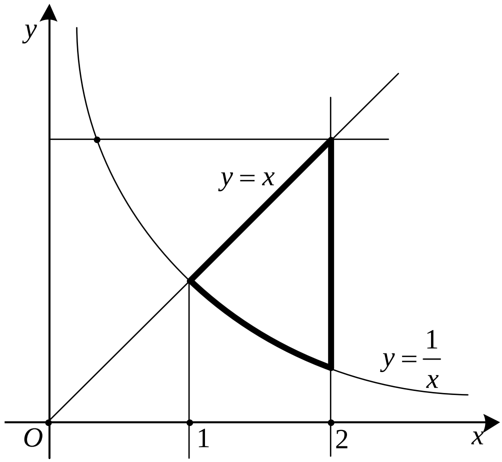

Рисунок 3.5

Таким чином,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int\limits_1^2 x^2 \left(\int\limits_{1/x}^{x} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int\limits_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \right)\Bigg|_{1/x}^{x} dx =$$

$$=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int_1^2\left(x-x^3\right)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Відповідь: $\frac{9}{4}$.

в) *Розв'язання.* Зробимо креслення (рисунок 3.6). Відповідно до рисунку, маємо:

$$\begin{cases} 0\le x\le \pi, \\ x\le y\le \pi. \end{cases}$$

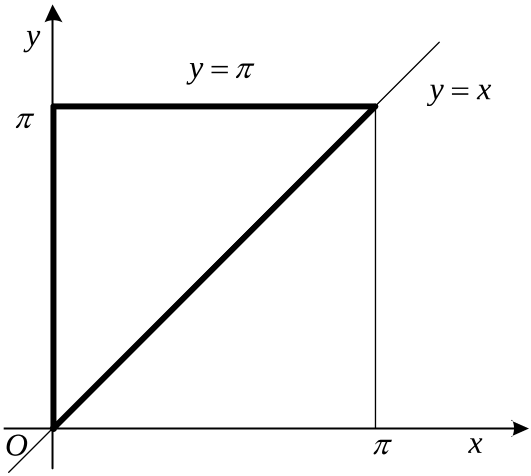

Рисунок 3.6

Отже,

$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\cos(x+y)\,dxdy=\int_0^{\pi}\sin(x+y)\Big|_x^{\pi}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sin(\pi+x)-\sin 2x\right)dx=-\cos(\pi+x)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=-2.$$

Відповідь: -2.

Завдання для самостійної роботи

Визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ для заданої області інтегрування D:

1. D – прямокутник: $1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5$;

2. D – трикутник, обмежений прямими $x + y = 6,\ y = 2x,\ y = x$;

3. D – паралелограм, обмежений прямими $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$;

4. D: $y \le \dfrac{2}{1 + x^2}$, $y \ge x^2$;

5. D – чверть кола: $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 9$;

6. D – область, обмежена параболами: $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

Відповідь:

1. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^5 f(x, y)\,dy$.

2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(x, y)\,dy$.

3. $\int\limits_{-2/3}^{1/3} dx \int\limits_{1-2x}^{x+3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{1/3}^{2/3} dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2/3}^{5/3} dx \int\limits_x^{5-2x} f(x, y)\,dy$.

4. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2/\left(1+x^2\right)} f(x, y)\,dy$.

5. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy$.

6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)\,dy$.

Обчислити наступні подвійні інтеграли:

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^2}$, область D обмежена прямими $x=3$, $x=4$, $y=1$, $y=2$.

Відповідь: $\ln\frac{25}{24}$.

2. $\iint\limits_D 2ydxdy$, область D обмежена параболою $y=\sqrt{x}$ та прямими $y=0$, $x+y=2$.

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

3. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, область D обмежена параболою $y=2-x^2$ та прямими $y=x$, $x=0$.

Відповідь: $\frac{67}{120}$.

4. $\iint\limits_D e^x dxdy$, область D обмежена прямими $x=0$, $y=1$, $y=2$, $x=\ln y$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.2 Подвійний інтеграл в полярній системі координат

Приклад 4. Перейти у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f\left(x, y\right)dxdy$ до полярних координат, якщо область D задана.

а) D : $x^2+y^2=2x$;

б) D : менший з двох сегментів, на які пряма $x+y=2$ розділяє коло $x^2+y^2\le 4$;

в) D – спільна частина двох кіл $x^2+y^2\le ax$ та $x^2+y^2\le by$.

а) *Розв'язання.* Приведемо рівняння $x^2 + y^2 = 2x$ до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно змінної x. Маємо:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Отже, це рівняння кола з центром $O_1(1, 0)$ радіуса $R = 1$, а область D, відповідно, коло (рисунок 3.7).

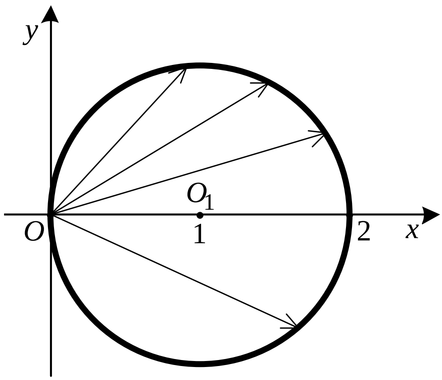

Рисунок 3.7

Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

тоді рівняння кола набуває вигляду $\rho = 2\cos\varphi$, причому змінна φ задовольняє умові:

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \text{ бо } \rho \ge 0, \text{ а } 0 \le \rho \le 2\cos\varphi.$$

Тоді маємо:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & D \to D', \\ y = \rho\sin\varphi, & D' : 0 \le \rho \le 2\cos\varphi, \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi, & -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{D'} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho d\varphi .$$

Відповідь: .

б) *Розв'язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.8).

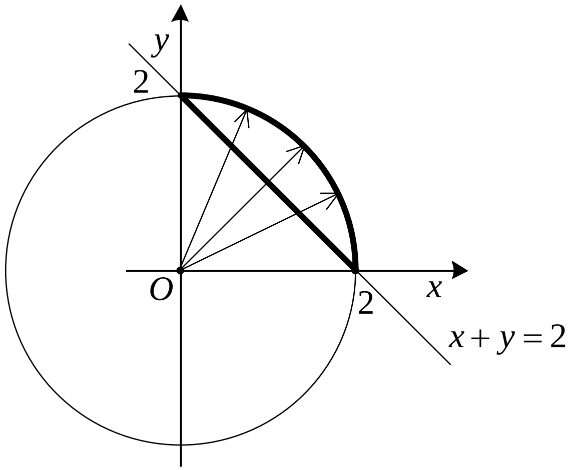

Рисунок 3.8

Очевидно, що $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Для того, щоб знайти межі інтегрування змінної ρ необхідно провести радіус-вектори.

Запишемо рівняння прямої $x + y = 2$ у полярній системі координат: $\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 2$, звідки

$$\rho = \frac{2}{\sin\varphi + \cos\varphi} .$$

В полярних координатах рівняння $x^2 + y^2 \le 4$ набуває вигляду $\rho^2 \le 4$, тобто $\rho \le 2$.

Таким чином можна записати

$$\frac{2}{\sin\varphi + \cos\varphi} \le \rho \le 2 .$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2/(\sin\varphi+\cos\varphi)}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho .$$

Відповідь: .

в) *Розв'язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.9).

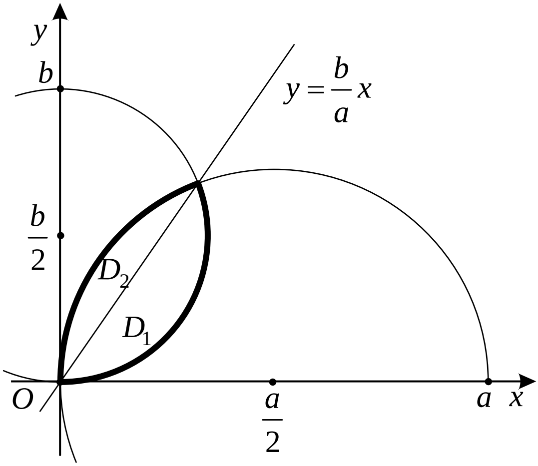

Рисунок 3.9

Приведемо рівняння двох кіл до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно змінної x та y, відповідно. Маємо

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4},$$

де $C_1\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ – центр першого кола, а радіус кола $R_1 = \frac{a}{2}$, та

$$x^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 \le \frac{b^2}{4},$$

де $C_2\left(0, \frac{b}{2}\right)$ – центр другого кола та радіус кола $R_2 = \frac{b}{2}$.

Очевидно, що для області, що є спільною частиною двох кіл,

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Але радіус-вектор ρ в цій області змінюється неоднозначно.

Для того, щоб визначитися з радіус-вектором, необхідно область розбити на дві області D_1 та D_2 прямою, що проходить через точки перетину цих кіл.

Рівнянням цієї прямої буде $by = ax$, тобто $y = \frac{a}{b}x$, а, отже, кут φ, під яким проведено пряму, буде $\varphi = \operatorname{arctg}(a/b)$.

Таким чином, в області

$$D_1:\ 0 \le \varphi \le \operatorname{arctg}(a/b),$$

а в області

$$D_2:\ \operatorname{arctg}(a/b) \le \varphi \le \pi/2.$$

Відповідно, радіус-вектор ρ в області D_1 буде змінюватись від 0 до $a\cos\varphi$, тобто $0 \le \rho \le a\cos\varphi$, а в області D_2 – $0 \le \rho \le b\sin\varphi$.

Отже,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi +$$

$$+\int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi.$$

Відповідь: .

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл:

а) Обчислити $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$ та $y \ge 0$.

Розв'язання. Виконаємо відповідне креслення (рисунок 3.10). З рисунка видно, що $\frac{\pi}{3} \le \rho \le \pi$, а $0 \le \varphi \le \pi$.

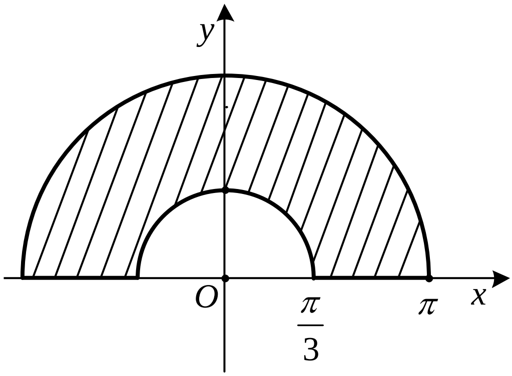

Рисунок 3.10

Таким чином, враховуючи формули переходу від декартової системи координат до полярної, де

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \text{ а } dxdy = \rho\, d\rho d\varphi,$$

маємо:

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin\rho}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho}\, d\rho = -\varphi\Big|_0^{\pi} \cdot \cos\varphi\Big|_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= -\pi\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}\right) = -\pi\left(-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{2}$.

б) Обчислити $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, де область D – частина кільця $x^2+y^2 \geq 1$, $x^2+y^2 \leq 9$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leq x\sqrt{3}$.

Розв'язання. Зробимо креслення області D (рисунок 3.11). Перейдемо до полярної системи координат, де

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

а $dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$. Тоді $x^2 + y^2 \ge 1 \;\Rightarrow\; \rho^2 \ge 1$, $\rho \ge 1$; $x^2 + y^2 \le 9 \;\Rightarrow$ $\rho^2 \le 9$, $\rho \le 3$.

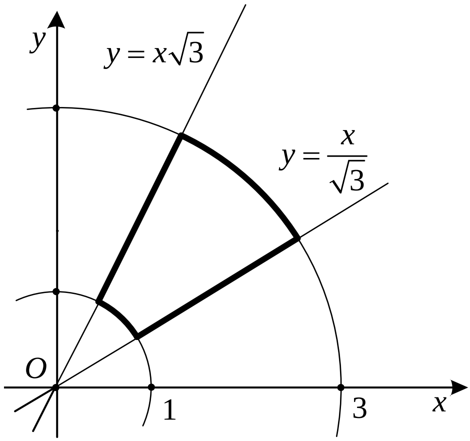

Рисунок 3.11

Очевидно, що

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} \le \varphi \le \operatorname{arctg}\sqrt{3}, \text{ тобто } \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \text{ а } 1 \le \rho \le 3.$$

Таким чином,

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^3 \operatorname{arctg}\frac{\cancel{\rho}\sin\varphi}{\cancel{\rho}\cos\varphi}\rho\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\varphi\Big|_1^3\right)\rho\, d\rho = 2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \rho\, d\rho = \cancel{2}\,\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} = \frac{3\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Завдання для самостійної роботи

У подвійному інтегралі перейти до полярних координат та обчислити його:

1. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – коло радіуса $R=2$ з центром у початку координат: $x^2+y^2\le 4$.

Відповідь: $\dfrac{16\pi}{3}$.

2. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де D – кільце $1\le x^2+y^2\le 4$.

Відповідь: 6π.

3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$.

4. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де область D – обмежена колом $x^2+y^2=2ay$.

Відповідь: $\dfrac{3\pi a^4}{2}$.

5. $\iint\limits_D xydxdy$, де D – область, що обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\left(x\ge 0,\ y\ge 0\right)$.

Відповідь: $\dfrac{a^2b^2}{8}$.

3.3 Геометричні застосування подвійного інтеграла

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) параболою $y=x^2-2x$ та прямою $y=x$;

б) параболою $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ та прямою $y = \frac{b}{a}x$ $(a, b > 0)$;

в) прямими $y = 0$, $y = x$ та колом $x^2 + y^2 = 2x$;

г) лемніскатою Бернуллі $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

а) *Розв'язання.* Зобразимо фігуру D за рівняннями її межі (рисунок 3.12).

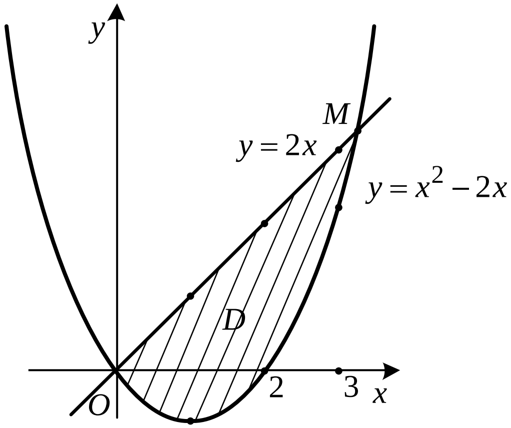

Рисунок 3.12

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = x, \end{cases}$$

знайдемо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, відповідно.

Отже, лінії, що обмежують область, перетинаються в точках $O(0, 0)$ та $M(3, 3)$.

Таким чином, область D задається системою нерівностей

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x^2 - 2x \le y \le x. \end{cases}$$

Тоді

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^3 dx\int_{x^2-2x}^{x} dy=\int_0^3\left(x-x^2+2x\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}$ кв. од.

б) *Розв’язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.13), попередньо визначимо точки перетину параболи та прямої.

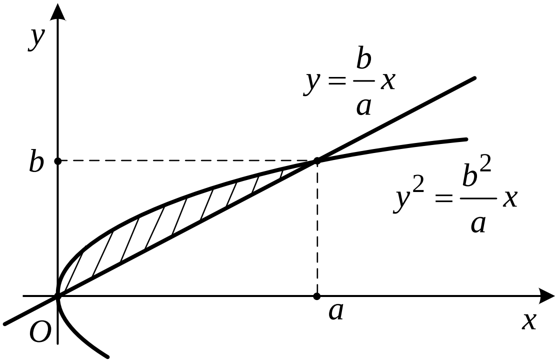

Рисунок 3.13

Маємо

$$y^2=\frac{b^2}{a}x \text{ та } y=\frac{b}{a}x,$$

отже можна записати

$$\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{b^2}{a}x, \text{ тобто } \frac{b^2}{a}x\left(\frac{x}{a}-1\right)=0.$$

Таким чином, $x_1=0$ та $x_2=a$. Отже, в даній області

$$\begin{cases} 0\le x\le a, \\ \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\le y\le \frac{b}{a}x. \end{cases}$$

Шукана площа має вигляд:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^a y\Big|_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^a\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}-\frac{b}{a}x\right)dx=$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_0^a-\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a=\frac{2ba\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}-\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{2ab}{3}-\frac{ab}{2}=\frac{ab}{6}.$$

Відповідь: $\frac{ab}{6}$ кв. од.

в) *Розв'язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.14). Введемо полярну систему координат. Тоді рівняння кола набуде вигляду $\rho^2=2\rho\cos\varphi$ або $\rho=2\cos\varphi$. Кут φ змінюється від 0 до $\pi/4$, а ρ змінюється, відповідно, від 0 до $2\cos\varphi$.

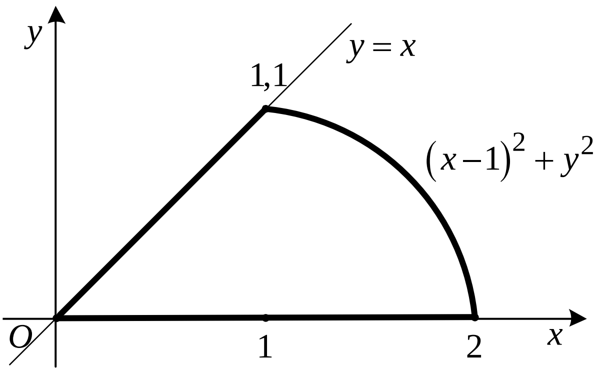

Рисунок 3.14

Отже,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\varphi\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ кв. од.

г) *Розв'язання.* Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.15). Оскільки лемніската Бернуллі симетрична відносно осей координат, то $S=4S_D$.

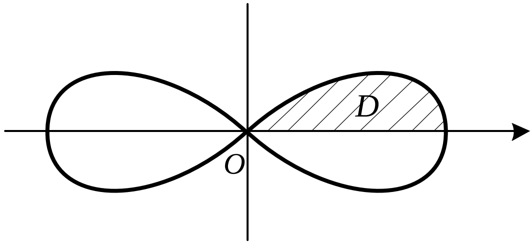

Рисунок 3.15

Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

тоді рівняння лемніскати перетвориться на рівняння:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right),$$

$$\rho^4=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right),$$

$$\rho^2=a^2\cdot\cos 2\varphi .$$

Враховуючи, що $\rho\ge 0$, маємо $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/4$.

Тоді

$$S=4S_D=4\iint\limits_D dxdy=\left|\begin{matrix}\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} & \begin{matrix} D\to D', \\ 0\le\rho\le a\sqrt{\cos 2\varphi}, \end{matrix} \\ dxdy=\rho\,d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le\pi/4 \end{matrix}\right|=$$

$$=4\iint\limits_{D'}\rho\,d\rho d\varphi=4\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho=4\int\limits_0^{\pi/4}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=4\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = a^2\cdot\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=a^2 .$$

Відповідь: a^2 кв. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та прямою $x=4$.

Відповідь: $\frac{16}{3}$ кв. од.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $x=4y-y^2$ та прямою $x+y=6$.

Відповідь: $\frac{1}{6}$ кв. од.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $y=1$, $y=3$ та гіперболою $y=1/x$.

Відповідь: $\ln 3$ кв. од.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $y=0$, $x=2$ та кривою $y=e^x$

Відповідь: e^2-1 кв. од.

Приклад 7. Обчислити об'єми заданих тіл:

а) обмеженого поверхнями $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ та розташованого в І-му октанті;

б) обмеженого площиною $z=0$ та параболоїдом $z=3-x^2-y^2$;

в) обмеженого поверхнями $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$ та $z=0$, та розташованого в І-му октанті.

а) *Розв'язання.* Тіло, об'єм якого необхідно обчислити, зверху обмежене площиною $z=3x$, знизу – площиною $z=0$, збоку параболічним циліндром $y=1+x^2$ та площиною $y=5$ (рисунок 3.16). Тобто це циліндричне тіло. Область D (проекція на xOy) обмежена параболою $y = x^2 + 1$ та прямими $y = 5$ та $x = 0$.

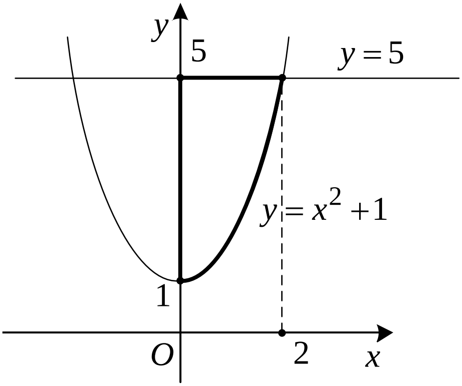

Рисунок 3.16

Таким чином,

$$V = \iint\limits_D z(x, y)\,dxdy = 3\int_0^2 x dx \int_{x^2+1}^{5} dy = 3\int_0^2 x \cdot y\Big|_{x^2+1}^{5} dx =$$

$$= 3\int_0^2 x\left(5 - x^2 - 1\right)dx = 3\int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx = 3\left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 12.$$

Відповідь: 12 куб. од.

б) *Розв'язання*. Зробимо креслення даного об'єкту.

Зверху дане тіло (рисунок 3.17), обмежене параболоїдом $z = 3 - x^2 - y^2$, а знизу – площиною $z = 0$, тому

$$V = \iint\limits_D \left(3 - x^2 - y^2\right)dxdy.$$

Область D – коло, його межа: $x^2 + y^2 = 3$ – результат перетину параболоїда $z = 3 - x^2 - y^2$ та площини $z = 0$.

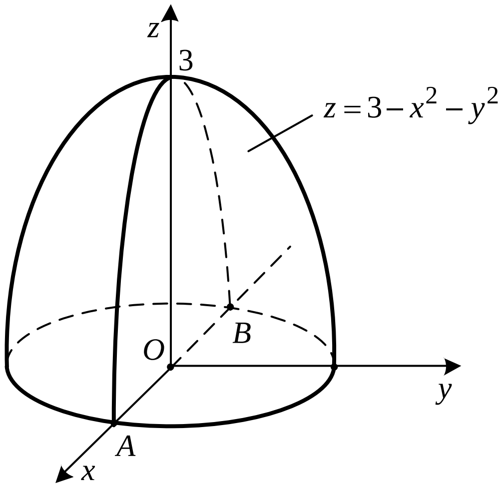

Рисунок 3.17

В полярних координатах рівняння границі області D буде: $\rho^2=3$ або $\rho=\sqrt{3}$. Враховуючи симетрію тіла відносно площин xOz та yOz, можна записати:

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-\rho^2\right)\rho d\rho=-\frac{4}{2}\int_0^{\pi/2}\left.\frac{\left(3-\rho^2\right)^2}{2}\right|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=$$

$$=2\cdot\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi=9\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{9\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9\pi}{2}$ куб. од.

в) *Розв'язання.* Задане тіло, обмежене зверху параболоїдом, знизу – площиною $z=0$. Область D – сектор кола, обмежений дугою кола $x^2+y^2=1$, що є лінією перетину параболоїда $z=1-x^2-y^2$ з площиною $z=0$, та прямими $y=x$ та $y=x\sqrt{3}$ (рисунок 3.18).

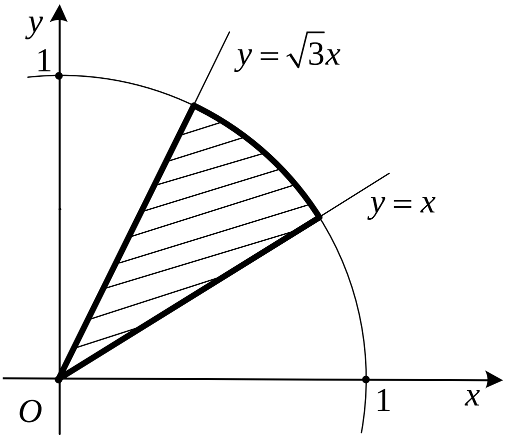

Рисунок 3.18

Оскільки область інтегрування є частиною кола, доцільно використати полярну систему координат. Рівняння кола $x^2+y^2=1$ в полярних координатах набуває вигляду $\rho=1$. При цьому межі інтегрування за змінною φ визначаємо з рівнянь прямих:

$$k_1=\operatorname{tg}\varphi_1=1,\ \text{тобто}\ \varphi_1=\pi/4;$$

$$k_2=\operatorname{tg}\varphi_2=\sqrt{3},\ \text{тобто}\ \varphi_2=\pi/3.$$

Остаточно маємо:

$$V=\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi=\frac{\pi}{48}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{48}$ куб. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами координат, площинами $x = 4$ та $y = 4$, та параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2 + 1$.

Відповідь: $186\frac{2}{3}$ куб. од.

2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами та площиною $x + y = 1$.

Відповідь: $\frac{1}{6}$ куб. од.

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$.

Відповідь: $8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$ куб. од.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $y = x^2$ та площинами $z = 0$ та $y = 1$.

Відповідь: $\frac{88}{105}$ куб. од.

Приклад 8. Обчислити площу частини фігури:

а) частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься в циліндрі $x^2 + y^2 = 2x$;

б) частини поверхні циліндра $z^2 = 4x$, що розташована в 1-му октанті, вирізаної циліндром $y^2 = 4x$ та площиною $x = 1$.

а) *Розв'язання.* Зробимо необхідне креслення (рисунок 3.19).

З рівняння конусу маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Область інтегрування – це коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 2x$ або $\rho = 2\cos\varphi$. Отже,

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi. \end{cases}$$

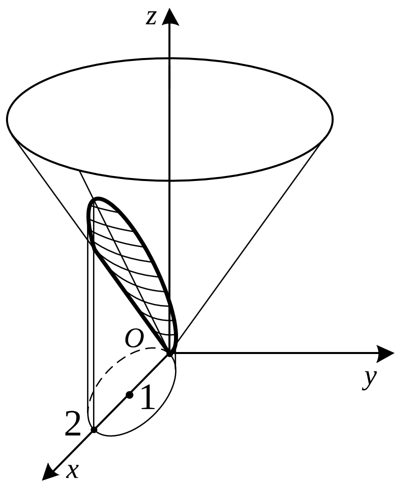

Рисунок 3.19

Тепер знайдемо площу $S_{пов}$:

$$S_{пов} = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy =$$

$$= \left\| \iint_D dxdy \text{ – є не що інше, як площа області } D \right\| \text{, тоді}$$

$$\iint_D dxdy = \pi R^2 \Big|_{R=1} = \pi \ .$$

Остаточно маємо: $S_{пов} = \sqrt{2}\pi$.

Відповідь: $S_{пов} = \pi\sqrt{2}$ кв. од.

б) *Розв'язання.* Зробимо необхідне креслення (рисунок 3.20). З рівняння поверхні $z^2 = 4x$ для 1-го октанту маємо:

$$z = 2\sqrt{x}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\ .$$

Область D – параболічний сегмент, обмежений в площині xOy параболою $y^2 = 4x$ або $y = 2\sqrt{x}$ та прямою $x = 1$.

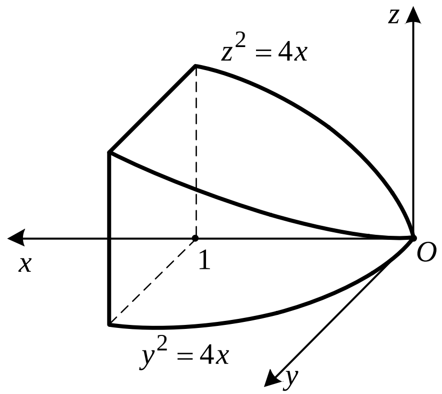

Рисунок 3.20

Таким чином, площа частини фігури $S_{пов}$:

$$S_{пов} = \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dy = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}} \cdot y\Big|_0^{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}dx = 2\int\limits_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}\left(x+1\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь: $S_{пов} = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ кв. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу тієї частини площини $6x+3y+2z=12$, яка знаходиться в 1-му октанті.

Відповідь: 14 кв. од.

2. Обчислити площу тієї частини поверхні $z^2 = 2xy$, яка знаходиться над прямокутником, що лежить в площині $z=0$ і який обмежений прямими $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=6$.

Відповідь: 36 кв. од.

3.4 Фізичні застосування подвійного інтеграла

Приклад 9. Обчислити масу та середню щільність пластинки D, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = 1$, якщо щільність визначається функцією $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Як завжди, в подвійних інтегралах необхідно розпочинати з рисунку (рисунок 3.21).

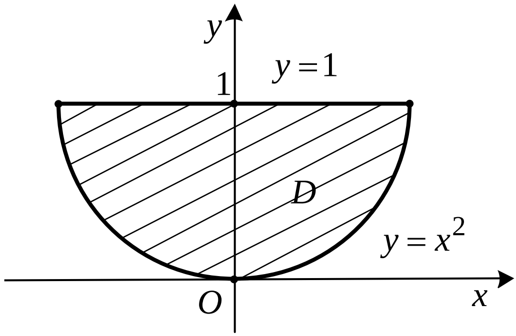

Рисунок 3.21

Очевидно, що в області D:

$$D:\ \begin{matrix} -1 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le 1. \end{matrix}$$

Обчислимо масу пластинки (враховуючи її симетрію відносно осі Oy):

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 \left(x^2 + y^2\right)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^1 dx = 2\int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right)dx = \frac{44}{105}.$$

Знайдемо площу S пластинки D:

$$S = \iint\limits_D dxdy = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy = 2\int\limits_0^1 y\Big|_{x^2}^1 dx = 2\int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Тоді середня щільність пластинки:

$$\mu_{сер} = \frac{m}{S} = \frac{44 \cdot 3}{105 \cdot 4} = \frac{11}{35}.$$

Відповідь: $m = \dfrac{44}{105}$; $\mu_{сер} = \dfrac{11}{35}$.

Приклад 10. Обчислити координати центра ваги фігури, обмеженої параболами $y^2 = 4x + 4$ та $y^2 = -2x + 4$.

Розв'язання. Виконаємо необхідні креслення (рисунок 3.22). Оскільки фігура симетрична відносно осі Ox, то $y_c = 0$. Проблема зводиться до того, щоб знайти x_c.

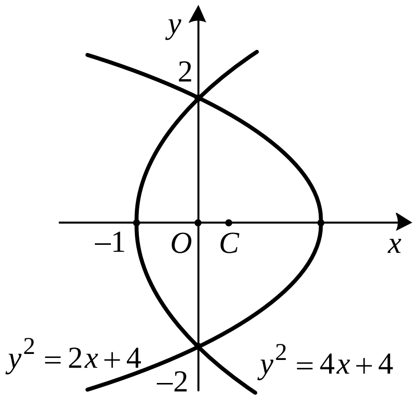

Рисунок 3.22

Обчислимо площу S даної фігури:

$$S = \iint_D dxdy.$$

Очевидно, що область D раціонально спроектувати на вісь Oy, тоді $-2 \le y \le 2$, а змінна x буде:

$$\frac{y^2-4}{4} \le x \le -\frac{y^2-4}{2},$$

тобто

$$\frac{y^2-4}{4} \le x \le \frac{4-y^2}{2}.$$

Таким чином,

$$S = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = 2\int_0^2 x\Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right) dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4}\right) dy = 6\left(y - \frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 6\left(2 - \frac{8}{12}\right) = 6\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{24}{3} = 8.$$

Тоді

$$x_c = \frac{1}{8}\iint_D x\,dxdy = \frac{1}{8}\cdot 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}\right] dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2\right] dy = \frac{1}{8}\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right) dy =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3\cdot y^5}{80}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $x_c = \dfrac{2}{5}$, $y_c = 0$.

Приклад 11. Знайти координати центра ваги плоскої пластинки D, заданої нерівностями $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3 - x^2 + 2x$ зі щільністю $\rho = x$.

Розв'язання. Область D обмежена осями координат та дугою параболи $y = -x^2 + 2x + 3$. Зробимо відповідне креслення (рисунок 3.23) заданої пластинки.

Спочатку знайдемо масу m цієї пластинки:

$$m=\iint\limits_D \rho\,dxdy=\iint\limits_D x\,dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3+2x-x^2} x\,dy=\int\limits_0^3 x\cdot y\Big|_0^{3+2x-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^3 x\left(3+2x-x^2\right)dx=\int\limits_0^3\left(3x+2x^2-x^3\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{27}{2}+18-\frac{81}{4}=\frac{45}{4}.$$

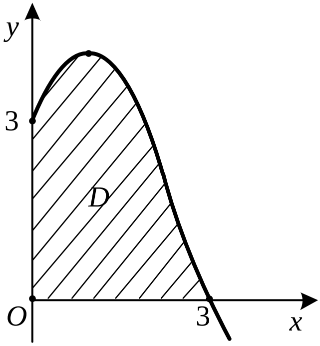

Рисунок 3.23

Знайдемо:

$$M_x=\iint\limits_D x\cdot\rho\,dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3+2x-x^2} x^2dy=\int\limits_0^3 x^2\left(3+2x-x^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(3x^2+2x^3-x^4\right)dx=\left(x^3+\frac{2x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=27+\frac{81}{2}-\frac{243}{5}=\frac{189}{10}.$$

Таким чином,

$$x_C=\frac{M_x}{m}=\frac{189}{10}:\frac{45}{4}=\frac{42}{25}=1{,}68.$$

Аналогічно,

$$M_y = \iint\limits_D y \cdot \rho\, dxdy = \iint\limits_D xy\, dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3+2x-x^2} xy\, dy = \int\limits_0^3 x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{3+2x-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x\left(3+2x-x^2\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x\left(9+4x^2+x^4+12x-6x^2-4x^3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x\left(9-2x^2+12x+x^4-4x^3\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(9x-2x^3+12x^2+x^5-4x^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9\frac{x^2}{2} - \frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{4}\,2} + \cancel{12}\,4\frac{x^3}{\cancel{3}\,1} + \frac{x^6}{6} - 4\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{351}{20}.$$

Отже,

$$y_C = \frac{M_y}{m} = \frac{351}{20} : \frac{45}{4} = 1{,}56.$$

Відповідь: Координати центра ваги пластинки $C(1{,}68;1{,}56) =$ $= C\left(\frac{42}{25}, \frac{39}{25}\right)$.

Приклад 12. Обчислити момент інерції фігури, обмеженої лінією $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ та осями координат $x=0$, $y=0$, відносно початку координат.

Розв'язання. Область D, обмежена заданими лініями, має вигляд (рисунок 3.24).

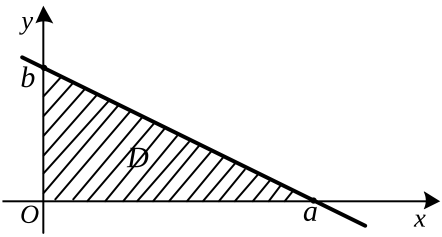

Рисунок 3.24

Момент інерції відносно початку координат дорівнює

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy;$$

з рисунка 3.24 видно, що $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \frac{b}{a}(a-x)$, тоді:

$$I_O = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \left(x^2 + y^2\right) dy = \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{b}{a} x^2 (a-x) + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3 \right) dx = \left(\frac{1}{3} bx^3 - \frac{b}{4a} x^4 - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^4 \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{ab\left(a^2 + b^2\right)}{12}.$$

Відповідь: $I_O = \frac{ab\left(a^2 + b^2\right)}{12}$.

Приклад 13. Обчислити момент інерції фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, відносно осі Ox.

Розв'язання. Зробимо відповідне креслення заданої фігури (рисунок 3.25).

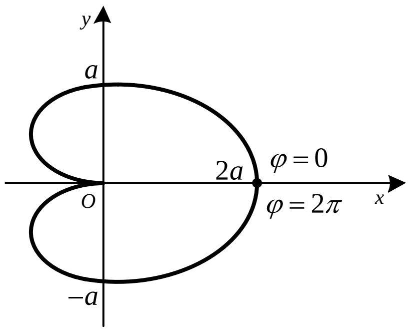

Рисунок 3.25

Фігура задана в полярній системі координат, тому при обчисленні моменту інерції перейдемо до полярних координат:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy = \left| \begin{array}{c} \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi; \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ 0 \le \rho \le a(1+\cos\varphi) \end{array} \right| = \iint\limits_D \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho\, d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi (1+\cos\varphi)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2\varphi \left(1 + 4\cos\varphi + 6\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\right)\right) d\varphi = \frac{21}{32}\pi a^4.$$

Відповідь: $I_x = \dfrac{21}{32}\pi a^4$.

Приклад 14. Знайти статичний момент однорідного півкола радіуса R відносно діаметра.

Розв'язання. Систему координат розмістимо так, щоб початок координат співпадав з центром півкола, а вісь Oy розташуємо таким чином, щоб вона співпадала з діаметром (рисунок 3.26).

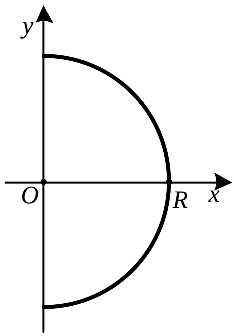

Рисунок 3.26

Тоді статичний момент півкола відносно діаметра буде дорівнювати статичному моменту півкола відносно осі Oy. З урахуванням того, що рівняння кола, яке обмежує півколо, має вигляд $x^2+y^2=R^2$, а в полярних координатах $\rho=R$, маємо:

$$M_d=M_y=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R\rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{3}\sin\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{R^3}{3}(1+1)=\frac{2R^3}{3}.$$

Відповідь: $M_d=\dfrac{2R^3}{3}$.

Приклад 15. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a, поверхнева щільність якого пропорційна y, відносно однієї з вершин.

Розв'язання. Зробимо креслення таким чином, щоб одна з вершин квадрата співпадала з початком координат (рисунок 3.27), щільність в цьому випадку буде $\gamma(x,y)=ky$, де k – коефіцієнт пропорційності.

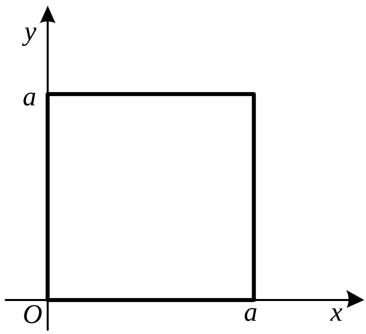

Рисунок 3.27

Тоді шуканий момент інерції буде дорівнювати моменту інерції квадрата відносно початку координат, тобто

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot ky\, dxdy = k\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2 y + y^3\right) dy = k\int\limits_0^a \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= k\int\limits_0^a \left(\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right) dx = k\left(\frac{a^2 x^3}{6} + \frac{a^2 x}{4}\right)\Bigg|_0^a = k\left(\frac{a^5}{6} + \frac{a^5}{4}\right) = \frac{5ka^2}{12}.$$

Відповідь: $I_O = \dfrac{5ka^2}{12}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти масу пластинки D, якщо D – прямокутний трикутник з катетами $OB = a$, $OA = b$, щільність $\gamma(x, y)$ в кожній точці пластинки пропорційна відстані точки від катета OA.

Відповідь: $\dfrac{a^2 b}{6}$.

2. Знайти координати центра ваги даних плоских фігур (щільність $\gamma(x, y) = 1$):

а) фігури, обмеженої параболою $y^2 = ax$ та прямою $y = x$;

б) фігури, обмеженої параболами $y^2 = 4x + 4$ та $y^2 = -2x + 4$;

в) фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$, віссю Ox та прямою $x = \pi / 4$.

Відповідь: а) $x_C = \dfrac{2}{5}a$; $y_C = \dfrac{a}{2}$; б) $x_C = \dfrac{2}{5}$; $y_C = 0$; в) $x_C = \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$; $y_C = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

3. Знайти статичні моменти даних плоских фігур (щільність $\gamma(x, y) = 1$) відносно вказаних осей:

а) прямокутника зі сторонами a та b відносно сторони a;

б) однорідної фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ та прямою OA, що проходить через початок координат і вершину $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ синусоїди $(x \geq 0)$, відносно осей Ox та Oy.

Відповідь: а) $\frac{ab^2}{2}$; б) $M_x = \frac{\pi}{24}$; $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.

4. Знайти моменти інерції даних плоских фігур:

а) однорідного трикутника (щільність $\gamma(x, y) = 1$), обмеженого прямими $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, відносно осей Ox, Oy та початку координат;

б) фігури, обмеженої лінією $x^2 + y^2 - 2x = 0$ відносно початку координат, якщо її щільність $\gamma(x, y) = 3{,}5$.

Відповідь: а) $I_x = \frac{1}{12}$; $I_y = \frac{7}{12}$; $I_O = \frac{2}{3}$; б) $\frac{21\pi}{4}$.

4. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

4.1 Потрійний інтеграл в декартовій системі координат

Приклад 16. Обчислити $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$, де область V обмежена площинами $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=2$, $z=5$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.1).

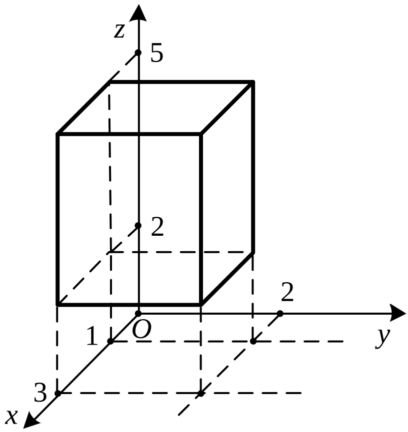

Рисунок 4.1

У зв'язку з тим, що область V є прямим паралелепіпедом, то маємо:

$$1 \le x \le 3,$$
$$0 \le y \le 2,$$
$$2 \le z \le 5.$$

Змінні x, y, z змінюються в постійних межах, а функція, що записана під знаком інтегралу є такою, що дозволяє даний потрійний інтеграл обчислювати, як добуток трьох інтегралів.

Таким чином,

$$\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz = \int_1^3 x^2dx\int_0^2 y^2dy\int_2^5 z\,dz = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_2^5 =$$

$$\frac{1}{3}(27-1)\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}(25-4)=\frac{4}{9}\cdot 26\cdot 21=\frac{4\cdot 26\cdot 7}{3}=\frac{728}{3}.$$

Відповідь: $\frac{728}{3}$.

Приклад 17. Обчислити $\iiint\limits_{G_T}(1-x)yz\,dxdydz$, якщо область G_T обмежена лініями $z=1-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.2).

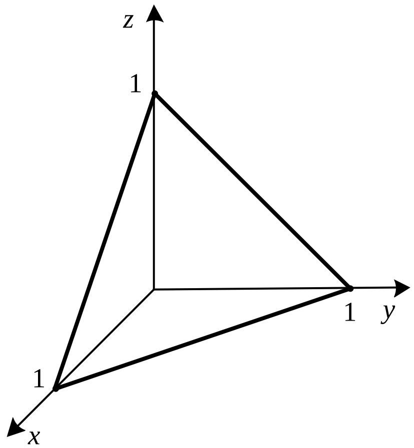

Рисунок 4.2

Область G_T має нижню межу $z=0$ та верхню межу $z=1-x-y$. При цьому область D проектується в інтервал $[0,1]$ осі Ox та має межі $y=0$ та $y=1-x$.

Отже,

$$\iiint\limits_{G_T}(1-x)yz\,dxdydz=\int_0^1(1-x)dx\int_0^{1-x}ydy\int_0^{1-x-y}zdz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)dx\int_0^{1-x}y\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1-x-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)dx\int_0^{1-x}y(1-x-y)^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x} y\cdot\left[(1-x)^2-2(1-x)y+y^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\left[(1-x)^2\cdot\frac{y^2}{2}-2(1-x)\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\left[\frac{(1-x)^4}{2}-\frac{2(1-x)^4}{3}+\frac{(1-x)^4}{4}\right]dx=\frac{1}{24}\int_0^1(1-x)^5\,dx=$$

$$=-\frac{1}{24}\cdot\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{144}.$$

Відповідь: $\frac{1}{144}$.

Приклад 18. Обчислити $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, де V – область, що обмежена параболічними циліндрами $y=x^2$, $x=y^2$, гіперболічним параболоїдом $z=xy$ та площиною $z=0$.

Розв’язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.3).

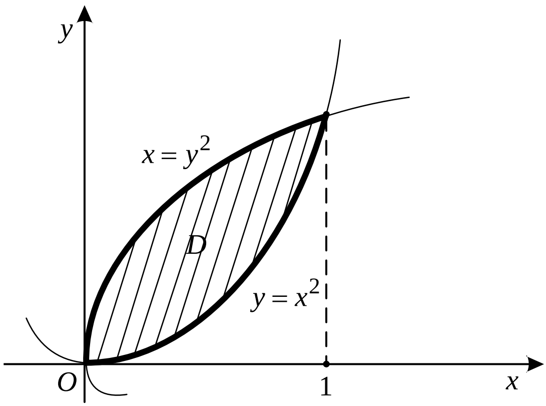

Рисунок 4.3

Дана область V являє собою фігуру, що зверху обмежена гіперболічним параболоїдом $z = xy$, знизу – площиною $z = 0$. Ця область проектується в область D площини xOy, обмежену параболами $y = x^2$ та $x = y^2$.

Таким чином, маємо:

$$\iiint\limits_V xyz\,dxdydz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy \int\limits_0^{xy} z\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y \cdot x^2 y^2 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^3 \left(\left.\frac{y^4}{4}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{4 \cdot 2}\int\limits_0^1 x^3 \left(x^2 - x^8 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left(x^5 - x^{11} \right) dx = \frac{1}{8}\left. \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Відповідь: $\frac{1}{96}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$;

б) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c \left(x + y + z \right) dz$;

в) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3 y^3 z\,dz$.

Відповідь: а) 6; б) $\frac{abc\left(a + b + c \right)}{2}$; в) $\frac{a^6}{110}$.

2. Обчислити потрійний інтеграл:

а) $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, де V – область, що обмежена циліндром $x^2+y^2=1$, параболоїдом $z=x^2+y^2$ та площиною $z=0$;

б) $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, де V – тетраедр, що обмежений координатними площинами та площиною $2x+2y+z-6=0$;

в) $\iiint\limits_V y\cdot\cos(z+x)dxdydz$, де V – область, що обмежена параболічним циліндром $y=\sqrt{x}$ та площинами $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$.

Відповідь: а) $\dfrac{\pi}{32}$; б) $\dfrac{27}{4}$; в) $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$.

4.2 Потрійний інтеграл в циліндричній системі координат

Приклад 19. Обчислити $\iiint\limits_V z\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де V – область, що обмежена площинами $z=0$, $z=a$ $(a>0)$ та циліндром $y^2+x^2=2x$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.4).

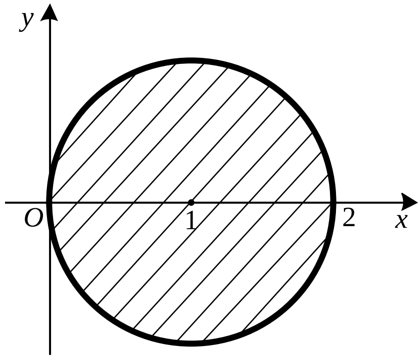

Рисунок 4.4

Ця область знизу і зверху обмежена площинами $z=0$ і $z=a$ та проектується в область D площини xOy, що являє собою коло з центром в точці $C(1,0)$, радіус якого $R=1$.

Враховуючи те, що область V – циліндр, раціонально скористатись циліндричною системою координат.

Тоді

$$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2;$$
$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi;$$
$$0 \le z \le a.$$

Таким чином,

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int_0^a \rho\cdot z\,dz =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^a d\rho = a^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/2} 8\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{8a^2}{3}\left.\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} = \frac{8a^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16a^2}{9}.$$

Відповідь: $\dfrac{16a^2}{9}$.

Приклад 20. Обчислити $\iiint_G \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, якщо область G обмежена площиною $z=2$ та параболоїдом $x^2+y^2=2z$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.5). Задана область обмежена зверху площиною $z=2$, а знизу – параболоїдом $x^2+y^2=2z$. Ця область проектується в область D площини xOy, обмежену колом $x^2+y^2=4$. Останнє рівняння отримали в результаті виключення z з рівняння площини $z=2$ та параболоїда $x^2+y^2=2z$.

Введемо циліндричні координати. Очевидно, що:

$$0 \le \varphi \le 2\pi;$$
$$0 \le \rho \le 2;$$
$$\rho^2 \le z \le 2.$$

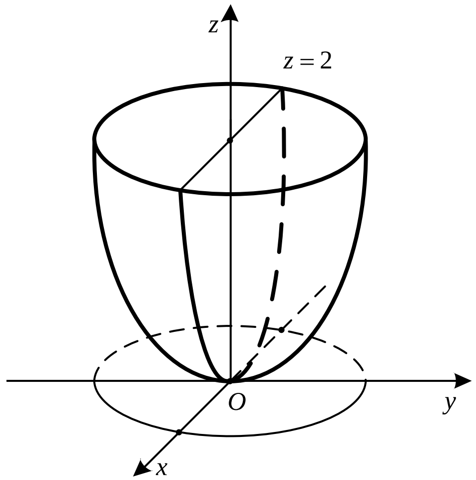

Рисунок 4.5

Таким чином,

$$\iiint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\rho^2/2}^{2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \cdot z\Big|_{\rho^2/2}^{2} d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \left(2-\frac{\rho^2}{2}\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(8-\frac{16}{3}\right) d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}.$$

Відповідь: $\frac{16\pi}{3}$.

Приклад 21. Обчислити $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, якщо область V обмежена конусом $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$ та площиною $z = h$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.6). Задана область, що обмежена зверху площиною $z = h$, а знизу – конусом $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$, проектується в область D площини xOy, обмежену колом $x^2 + y^2 = R^2$.

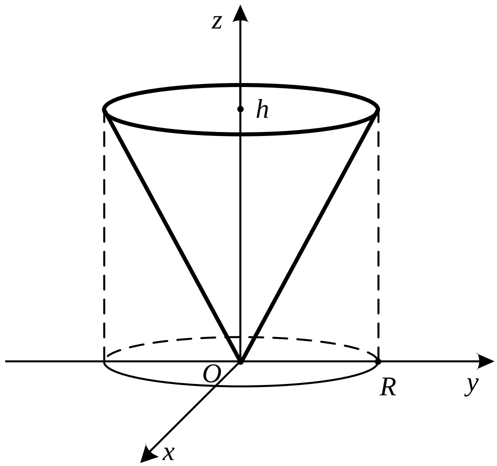

Рисунок 4.6

Очевидно, що всі обчислення краще вести в циліндричній системі координат, при цьому

$$0 \le \varphi \le 2\pi\,;$$

$$0 \le \rho \le R\,;$$

$$\frac{h}{R}\rho \le z \le h\,.$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\,d\rho \int\limits_{(h\rho)/R}^{h} z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_{(h\rho)/R}^{h} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\left(h^2 - \frac{h^2\rho^2}{R^2}\right)d\rho = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \int\limits_0^R \left(\rho h^2 - \frac{h^2\rho^3}{R^2}\right)d\rho =$$

$$= \pi\left.\left(\frac{h^2\rho^2}{2} - \frac{h^2}{R^2}\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^R = \pi\left(\frac{h^2R^2}{2} - \frac{h^2R^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{h^2R^2}{2} - \frac{h^2R^2}{4}\right) = \frac{\pi h^2R^2}{4}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi h^2 R^2}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, якщо область V обмежена циліндром $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ та $y = x\sqrt{3}$.

Відповідь: $\dfrac{R^4}{32}$.

2. Обчислити $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, якщо область V обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2x$, площиною $z = 0$ та параболоїдом $z = x^2 + y^2$.

Відповідь: $\dfrac{32}{15}$.

4.3 Потрійний інтеграл в сферичній системі координат

Приклад 22. Обчислити $\iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$, якщо область G – верхня половина сфери $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.7). Скористаємося сферичною системою координат.

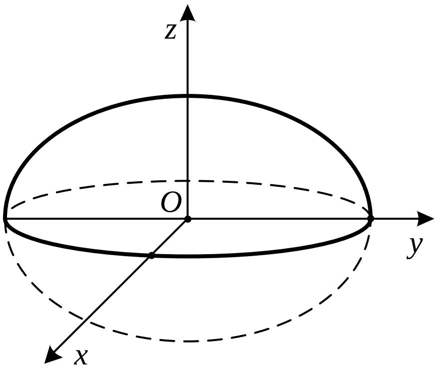

Рисунок 4.7

Маємо

$$0 \le \varphi \le 2\pi\ ;$$

$$0 \le \theta \le \pi/2\ ;$$

$$0 \le \rho \le r\ .$$

Тоді

$$\iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{так як змінні інтегрування змінюються в постійних межах} \\ \textit{та не залежать одна від іншої, то такий потрійний інтеграл} \\ \textit{можна розглядати як добуток трьох визначених інтегралів} \end{array} \right| =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^r \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi - 1\right) \cdot d\left(\cos\varphi\right) = 2\pi \cdot \frac{r^5}{5} \cdot \left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2\pi r^5}{5}\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4\pi r^5}{3}\ .$$

Відповідь: $\dfrac{4\pi r^5}{3}$.

Приклад 23. Обчислити $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, якщо область інтегрування обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.8). Канонічне рівняння заданої сфери буде

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

тобто її центр розташований в точці $C(0,0,1/2)$, а радіус $R=1/2$.

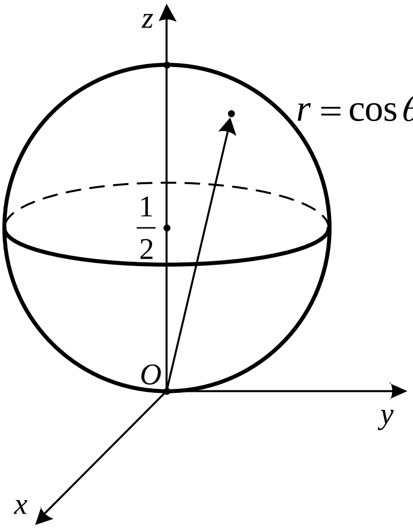

Рисунок 4.8

Рівняння сфери у сферичній системі координат буде

$$\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho\cos\theta$$

$$\text{або } \rho^2=\rho\cos\theta,\ \rho=\cos\theta.$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_V \rho^3\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^4 \sin\theta d\theta = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta)^5}{5}\bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{20}\varphi\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{10}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{10}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}dxdydz$, якщо область інтегрування є частиною сфери $x^2+y^2+z^2=1$, де $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

2. Обчислити $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, де область інтегрування визначається нерівностями $z \ge 0$, $r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Відповідь: $\frac{4}{15}\pi\left(R^5-r^5\right)$.

4.4 Застосування потрійного інтеграла

Приклад 24. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $hz = x^2+y^2$ та площиною $z=h$ $h>0$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.9). Дане тіло обмежене знизу параболоїдом $z=\left(x^2+y^2\right)/h$, зверху – площиною $z=h$ та проектується в круг $x^2+y^2 \le h^2$ площини xOy. Використовуючи циліндричну систему координат, в якій рівняння параболоїда набуває вигляду

$$z=\frac{\rho^2}{h},$$

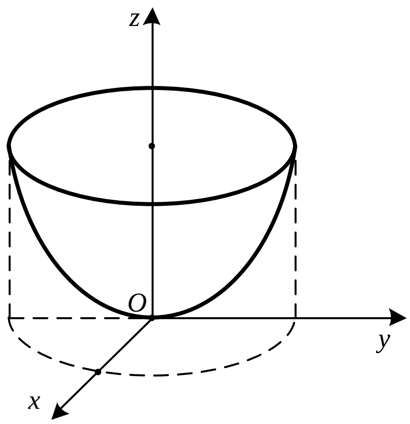

Рисунок 4.9

маємо:

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{h}\rho\,d\rho\int\limits_{\rho^2/h}^{h}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{h}\rho\cdot z\Big|_{\rho^2/h}^{h}d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{h}\rho\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^{h}d\varphi=\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^4}{4h}\right)\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{h^3}{4}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi h^3}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi h^3}{3}$.

Приклад 25. Знайти об’єм тіла, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та площинами $x+z=4$ і $z=0$.

Розв’язання. Зробимо необхідне креслення (рисунки 4.10, 4.11). Задане тіло обмежене зверху площиною $x+z=4$, знизу площиною $z=0$ і з боків прямими циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$.

При цьому змінна x змінюється від 0 до 4, тобто $0 \le x \le 4$, при будь-якому значенні з цього проміжку $\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}$. Крім того, $0 \le z \le 4-x$.

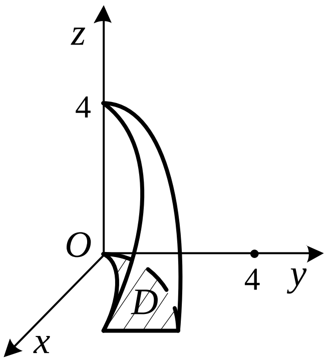

Рисунок 4.10

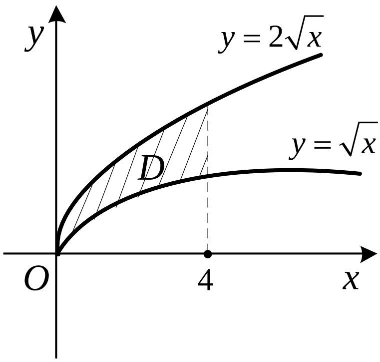

Рисунок 4.11

Отже,

$$V = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{4-x} dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} z\Big|_0^{4-x} dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)\,dy =$$

$$= \int_0^4 (4-x)\,y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (4-x)\cdot\sqrt{x}dx = \frac{2\cdot 4\cdot x^{3/2}}{3}\Bigg|_0^4 - \frac{2x^{5/2}}{5}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}.$$

Відповідь: $\frac{128}{15}$.

Приклад 26. Обчислити об’єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 4$ та площинами $y + z = 2$ і $z = 0$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.12). Дане тіло обмежене зверху площиною $z+y=2$, знизу – $z=0$ та проектується в коло $x^2+y^2=4$.

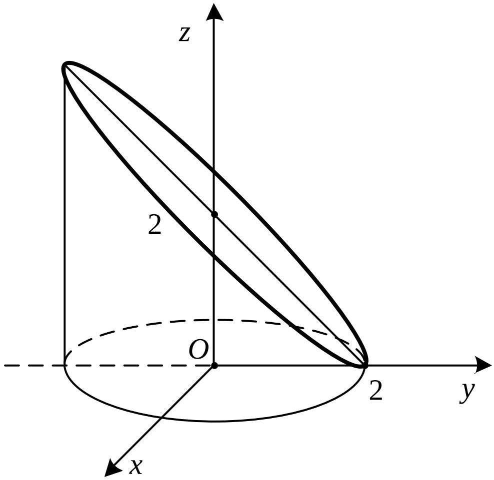

Рисунок 4.12

Використовуючи циліндричну систему координат, маємо:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_0^{2-\rho\sin\varphi}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\cdot z\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi}d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(2-\rho\sin\varphi\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(4-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=4\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{8}{3}\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\pi\ .$$

Відповідь: 8π .

Приклад 27. Знайти координати центра ваги півкулі $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$, якщо щільність в кожній точці пропорційна відстані від точки до центра.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} .$$

В силу симетрії $x_C = y_C = 0$, $I_C = \dfrac{M_{xy}}{m}$. Скористаємось сферичною системою координат та знайдемо статичний момент відносно площини xOy:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \mu(x, y, z)\,dxdydz = k\iiint\limits_V \rho\cos\theta \cdot \rho \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = k \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R =$$

$$= 2k \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{k\pi R^5}{5} .$$

Знайдемо масу тіла:

$$m = \iiint\limits_V \mu\, dxdydz = k\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = k\iiint\limits_V \rho \cdot \rho^2 \cdot \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= k \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = k \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{k\pi R^4}{2} .$$

Отже,

$$z_C = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{5}R ,$$

таким чином,

$$C\left(0, 0, \frac{2}{5}R\right).$$

Відповідь: $C\left(0, 0, \dfrac{2}{5}R\right)$.

Приклад 28. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, що обмежене параболоїдом $z = 3 - x^2 - y^2$ та площиною $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.13).

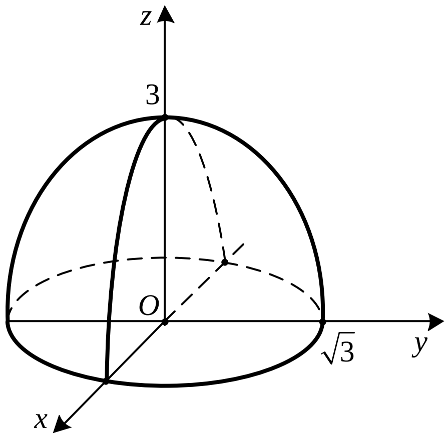

Рисунок 4.13

Враховуючи симетрію тіла відносно координатних площин xOz та yOz, можна записати $x_C = y_C = 0$. Щоб визначити z_C, знайдемо масу тіла m. Для цього скористаємось циліндричною системою координат. Маємо:

$$m = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_0^{3-\rho^2} dz = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho z\Big|_0^{3-\rho^2} d\rho = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\left(3-\rho^2\right) d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = 4\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right)\cdot \varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Тоді

$$z_C = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_0^{3-\rho^2} z\, dz\right) / \frac{9\pi}{2} = \frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{3-\rho^2} d\rho =$$

$$=\frac{1}{9\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho\left(3-\rho^2\right)^2 d\rho=-\frac{1}{18\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(3-\rho^2\right)^2\cdot d\left(3-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{18\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{\left(3-\rho^2\right)^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 29. Визначити момент інерції однорідної піраміди відносно координатної площини xOy, якщо піраміда обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Зробимо необхідне креслення (рисунок 4.14).

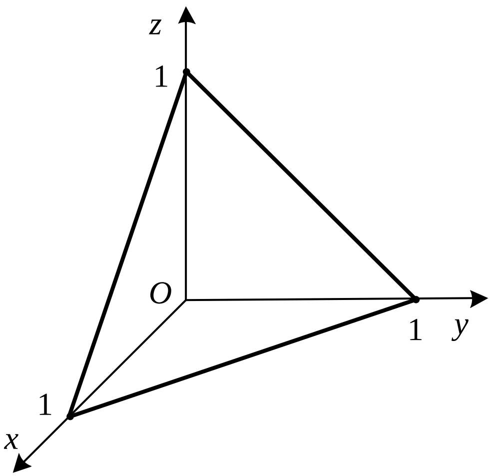

Рисунок 4.14

Відповідно до формули, маємо:

$$I_{xy}=\iiint\limits_V z^2dxdydz=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}z^2dz=\frac{1}{3}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}\left.z^3\right|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^3\,dy=-\frac{1}{12}\int_0^1(1-x-y)^4\Big|_0^{1-x}dx=\frac{1}{12}\int_0^1(1-x)^4\,dx=$$

$$=-\frac{1}{60}(1-x)^5\Big|_0^1=\frac{1}{60}.$$

Відповідь: $\frac{1}{60}$.

Приклад 30. Знайти момент інерції однорідної кулі, радіус якої дорівнює 1, відносно її центра.

Розв'язання. Розташуємо кулю таким чином, щоб її центр співпав з початком системи координат. Тоді:

$$I_0=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$$

Користуючись сферичною системою координат, маємо:

$$I_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\rho^5\Big|_0^1d\theta=$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{5}\cdot 2\pi=\frac{4\pi}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=4$ та параболоїдом $z=x^2+y^2$, за умови, що $z\ge 0$.

Відповідь: 8π.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z=x^2+y^2$ та $z=2x^2+2y^2$, циліндром $y=x^2$ та площиною $y=x$.

Відповідь: $\frac{3}{35}$.

3. Знайти момент інерції однорідного циліндра з висотою h та радіусом основи a відносно діаметра основи та відносно осі циліндра.

Відповідь: $I_x = \dfrac{\pi a^2 h}{12}\left(3a^2 + 4h^2\right)$, $I_z = \dfrac{\pi a^4 h}{2}$.

4. Знайти координати центра ваги тіла, обмеженого параболоїдом $z = x^2 + y^2$ та площинами $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Відповідь: $x_C = y_C = \dfrac{2a}{5}$, $z_C = \dfrac{7a^2}{30}$.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Таблиця похідних

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R, x > 0;$

$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, x \in R;$

$(e^x)' = e^x, \quad x \in R;$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, x > 0;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R;$

$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in Z;$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R;$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R;$

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R;$

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$

2. Основні правила диференціювання

Якщо $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – функції , що мають похідні, а C – стала, то:

$$(C)' = 0;$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-C \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\big(f(U(x))\big)'_x = f'_U \cdot U'_x.$$

3. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C.$$

4. Основні властивості невизначеного інтегралу

$\int f(x)dx = F(x)+C,$ за умови $F'(x) = f(x)$;

$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; $\int dF(x) = F(x)+\mathrm{C}$;

$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)\right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx$;

$\int c\ f(x)dx = c\int f(x)dx$;

$\int f(u)du = F(u)+C,$ C – стала, $u = u(x)$ – будь-яка функція, що має похідну за змінної x;

$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$; $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

5. Деякі тригонометричні формули

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$;

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right) = \cos\alpha$;

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right) = -\cos\alpha$;

$\cos(\pi\pm\alpha) = -\cos\alpha$;

$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\sin(\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\sin\alpha$;

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$; $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac\geq 0.$$

Теорема Вієта: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \end{cases}$ де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Квадратний тричлен ax^2+bx+c можна розкласти на множники:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$; $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\ .$$

2. Заміна змінної:

$$\int_a^b f(x)dx=\left\|\begin{matrix} x=\varphi(t), & dx=\varphi'(t)dt, \\ \varphi(\alpha)=a, & \varphi(\beta)=b \end{matrix}\right\|=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\ .$$

3. Інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла: якщо

$m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

5. Теорема про середнє значення: якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то існує така точка $c \in (a,b)$, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Значення $f(c)$ − середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

6. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \ge 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = \int_a^b f(x)dx$.

7. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, ($\varphi(y) \ge 0$), $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = \int_c^d \varphi(y)dy$

8. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \le 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

9. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, ($\varphi(y) \le 0$), $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = -\int_c^d \varphi(y)dy$

10. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(f_2(x) \ge f_1(x))$, $x = a$, $x = b$: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

11. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $(\varphi_2(y)\geq\varphi_1(y))$, $y=c$, $y=d$: $S=\int\limits_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy.$

12. Площа плоскої фігури, якщо крива $y=f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),\ \alpha\leq t\leq\beta: \end{cases}$ $S=\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

13. Площа криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, і променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta,\ (\alpha<\beta)$: $S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi$.

14. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$: $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

15. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $x=\varphi(y)$, $c\leq y\leq d$: $l=\int\limits_c^d\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy$.

16. Довжина дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),\ \alpha\leq t\leq\beta: \end{cases}$ $l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$.

17. Довжина дуги лінії, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leq\varphi\leq\beta$: $l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$.

18. Об’єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$: $V_{ox}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

19. Об’єм тіла, отриманого при обертанні навколо Oy осі криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x=\varphi(y)$, $y=c$, $y=d$, $x=0$: $V_{oy}=\pi\int\limits_a^b \varphi^2(y)dy$.

20. Об’єм тіла, отриманого при обертання навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $\left(0\le f_1(x)\le f_2(x)\right)$, $x=a$, $x=b$. $V_{ox}=\pi\int\limits_a^b (f_2^2(x)-f_1^2(x))dx$.

21. Об’єм тіла, отриманого при обертання навколо осі Oy фігури, що обмежена лініями $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $\left(0\le\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)\right)$, $y=c$, $y=d$. $V_{oy}=\pi\int\limits_c^d (\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y))dy$.

22. Невласні інтеграл першого роду:

а) $\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$;

в) $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$.

23. Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду:

а) Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на $[a,\infty)$. Тоді для будь-якого $x_0>a$ невласні інтеграли $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ та $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

б) Ознака порівняння. Нехай при $a\le x<\infty$ виконується умова: $0\le f(x)\le g(x)$. Тоді: якщо $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$; якщо $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

в) Гранична ознака порівняння. Нехай $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, де $f(x)$ та $g(x)$ неперервні знакосталі функції, тоді невласні інтеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

г) Достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції. Якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ збігається і називається абсолютно збіжним.

24. Невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p>1$ та розбігається, якщо $p\le 1$.

25. Невласні інтеграли другого роду: а) $\int\limits_a^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, де $x=b$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$; б) $\int\limits_a^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, де $x=a$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$; в) $\int\limits_a^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$, де $x=c$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$.

26. Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду:

а) Ознака порівняння. Нехай функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ неперервні на $[a,b)$, $x=b$ – точка нескінченного розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$ і $0\le f(x)\le g(x)$. Тоді: якщо $\int\limits_a^{b} g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$; якщо $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл

$\int_a^b g(x)dx$.

б) Гранична ознака порівняння. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та знакосталі на $[a,b)$, $x=b$ − точка нескінченного розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$ і $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$. Тоді невласні інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

в) Достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції. Якщо $x=b$ − точка нескінченного розриву функцій $f(x)$ і збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається і називається абсолютно збіжним.

27. Невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p<1$ та розбігається, якщо $p\geq 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для втузов. – 20-е изд. / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 2 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 376 с.

3. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба, Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 432 с.

4. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 2 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 476 с.

5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н.О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2013. – 216 с.

6. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 440 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ПРІЩЕНКО Ольга Петрівна
ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

ПОДВІЙНИЙ ТА ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛИ
Навчальний посібник
з курсу вищої математики
для студентів та викладачів усіх спеціальностей

Відповідальний за випуск проф. Чікіна Н. О.

Роботу до видання рекомендувала доц. Руднева Г. В.

В авторській редакції

План 2022 р., поз. 17

Підп. до друку 09.02.2022 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso – друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,6. Наклад 50 прим.
Зам. № 79. Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач:

ТОВ «Друкарня Мадрид»
61024, м. Харків, вул. Гуданова, 18

Тел.: 0 800 33 67 62
www.madrid.in.ua
info@madrid.in.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4399 від 27.08.2012 року