

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. П. Пріщенко, Т. Т. Черногор

**ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ**

Навчальний посібник
для студентів хімічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

УДК 517.91(075)

П 77

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Українська інженерно-педагогічна академія Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна;

І. К. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Пріщенко О. П.

П 77 Звичайні диференціальні рівняння та їх застосування при розв'язуванні прикладних задач : навч. посіб. для студентів хімічних спеціальностей / О. П. Пріщенко, Т. Т. Черногор. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 142 с.

ISBN 978-617-05-0539-2

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, детально роз'яснені методи розв'язання типових диференціальних рівнянь, методику розв'язання прикладних задач з фізико-хімічним змістом, 25 варіантів розрахункових завдань до них та три самостійні роботи.

Призначено для студентів хімічних спеціальностей.

Табл. 1. Іл. 3. Бібліогр. 5 назв.

УДК 517.91(075)

ISBN 978-617-05-0539-2

© Пріщенко О. П.,
Черногор Т. Т., 2025
© НТУ «ХПІ», 2025

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки і техніки. Тому теорія диференціальних рівнянь, як окрема тема в курсі вищої математики, посідає важливе місце в системі підготовки фахівців з механіки, фізики, електротехніки, хімії та машинобудування.

Навчальний посібник з курсу вищої математики «Звичайні диференціальні рівняння та їх застосування при розв'язуванні прикладних задач» має за мету допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, а також набуті практичних навиків у розв'язанні диференціальних рівнянь. В даному посібнику приділено достатню увагу детальному роз'ясненню методів розв'язання типових рівнянь теорії звичайних диференціальних рівнянь, його зміст повністю відповідає програмі з курсу диференціальних рівнянь для студентів хімічних спеціальностей.

Навчальний посібник складається з двох розділів, до складу яких входять детально роз'яснені методи розв'язання типових диференціальних рівнянь, методика розв'язання прикладних задач з фізико-хімічним змістом, 25 варіантів розрахункових завдань до них та три самостійні роботи.

Посібник може стати в нагоді також студентам, які самостійно вивчають теорію диференціальних рівнянь, так як в тексті є короткий зміст основних теоретичних відомостей, знання яких необхідно для свідомого розв'язання диференціальних рівнянь та хімічних задач.

Методичні вказівки до виконання розрахункових завдань

В розрахунковому завданні 1 необхідно розв'язати чотирнадцять диференціальних рівнянь і систему. Для цього необхідно навчитися класифікувати рівняння та з'ясувати методи їх розв'язання.

В розрахунковому завданні 2 при розв'язанні прикладних задач можна рекомендувати таку послідовність дій:

- встановити, яким законом підпорядковується даний процес;
- вибрати незалежну змінну і шукану функцію;
- визначити початкові умови;
- відобразити всі наявні в задачі величини, використовуючи при цьому фізичний зміст похідної;
- скласти диференціальне рівняння;
- знайти загальний інтеграл диференціального рівняння;
- за початковими умовами знайти частинний розв'язок.

Автори сподіваються, що теоретичні відомості, які містяться в посібнику, дадуть змогу студентам оволодіти методикою розв'язання практичних задач з теорії звичайних диференціальних рівнянь, активізують їх самостійну роботу та сприятимуть підвищенню фундаментальної підготовки з цього розділу вищої математики.

Автори

1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Нагадаємо, що *диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну. Порядок диференціального рівняння визначає порядок найвищої похідної. Загальний вигляд диференціального рівняння:

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, y' – її похідна.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція, яка задовольняє цьому рівнянню (тобто функція при підстановці якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Кожний розв'язок, отриманий із загального розв'язку при певному значенні сталої C , називається *частинним розв'язком*.

Для знаходження частинного розв'язку необхідно задати умови $y(x_0) = y_0$, які називаються *частинними умовами*.

Задача знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах називається *задачею Коші*.

Приклад 1. Переконатись, що функція $y = Cx^2$, де C – довільна стала, є розв'язком диференціального рівняння $xy' - 2 = 0$. Знайти частинний розв'язок, що відповідає початковим умовам $y(1) = 3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну від функції $y = Cx^2$:

$$y' = 2Cx.$$

Підставимо в задане рівняння значення y та y' :

$$x \cdot 2Cx - 2Cx^2 = 0.$$

Таким чином функція $y = Cx^2$ після підстановки її в диференціальне рівняння перетворила його в тотожність. Тому ця функція є розв'язком заданого диференціального рівняння.

Рівняння $y = Cx^2$ визначає *сімейство парабол*, що утворюють *сімейство інтегральних кривих рівняння*.

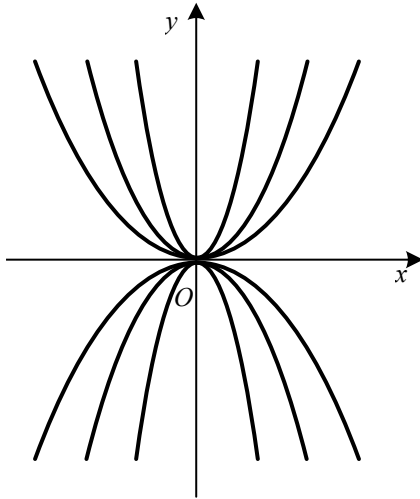


Рисунок 1.1

Щоб знайти частинний розв'язок, підставимо в рівність $y = Cx^2$ значення $x_0 = 1$ та $y_0 = 3$. Отримаємо, що $C = 3$.

Тому частинний розв'язок має вигляд: $y = 3x^2$.

Відповідь: $y = 3x^2$.

Приклад 2. Довести, що функція, що задана параметрично $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos t, \end{cases}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції, що задана параметрично:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b \sin t}{a \cos t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Підставимо значення x , y та y' в задане рівняння:

$$-\frac{b}{a} \operatorname{tg} t = -\frac{b^{\cancel{z}}}{a^{\cancel{z}}} \cdot \frac{\cancel{a} \sin t}{\cancel{b} \cos t}$$

і отримаємо

$$-\frac{b}{a} \operatorname{tg} t = -\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t,$$

що являє собою тотожність.

А це і означає, що функція $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos t \end{cases}$ є розв'язком заданого

диференціального рівняння.

Відповідь: Доведено, що функція $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos t \end{cases}$ є розв'язком дифе-

ренціального рівняння.

Розглянемо деякі види диференціальних рівнянь першого порядку.

1.1.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду $M(y)dy = N(x)dx$, де $M(y)$, $N(x)$ – неперервні функції, називається **диференціальним рівнянням з відокремленими змінними**. Для знаходження розв'язання такого рівняння необхідно проінтегрувати його обидві частини:

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

Після інтегрування одержимо так званий **загальний розв'язок диференціального рівняння**.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \frac{dx}{x}$$

Розв'язання. Маємо $\int e^{\sin y} \cdot \cos y dy = \int \frac{dx}{x}$, де $e^{\sin y} = \ln|Cx|$ – це і є

загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $e^{\sin y} = \ln|Cx|$.

Рівняння виду:

$$M(x)N(y)dy + P(y)Q(x)dx = 0,$$

де $M(x)$, $N(y)$, $P(y)$, $Q(x)$ – неперервні функції, називається **диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними**. Поділивши обидві частини такого рівняння на вираз $M(x) \cdot P(y)$, одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{N(y)}{P(y)} dy = -\frac{Q(x)}{M(x)} dx.$$

При цьому також необхідно врахувати, що можуть бути втрачені розв'язання рівняння, а тому слід розглянути рівняння $P(y) = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо відповідні дії:

$$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0,$$

$$\frac{ydy}{y^2 + 1} = -\frac{xdx}{1 - x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + \frac{1}{2} \ln C \Rightarrow \ln(y^2 + 1) = \ln|(1 - x^2) \cdot C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 1 = C(1 - x^2) \text{ – загальний розв'язок рівняння.}$$

Відповідь: $y^2 + 1 = C(1 - x^2)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

$$yy' = \frac{1 - 2x}{y}.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, рівняння набуде вигляду:

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y}$$

$$\text{або } y^2 dy = (1 - 2x) dx.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, маємо:

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

$$\text{або } y^3 = 3x - 3x^2 + C_1.$$

Таким чином, $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C_1}$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

$$\text{Відповідь: } y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C_1}.$$

Приклад 6. Розв’язати задачу Коші:

$$y' \cdot \sin x = y \ln y \text{ за умови } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Розв’язання. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y \Rightarrow \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \ln|C|,$$

$\ln|\ln y| = \ln\left|C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| \Rightarrow \ln y = C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

Враховуючи, що $y = e$ при $x = \frac{\pi}{2}$, маємо $e = e^{C \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$, тоді $e = e^C \Rightarrow C = 1$.

Таким чином, $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ – частинний розв’язок диференціального рівняння, що відповідає заданим початковим умовам.

$$\text{Відповідь: } y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

1.1.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називається **однорідним**, якщо його можна записати у вигляді $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, де права частина є функцією тільки від відношення змінних $\frac{y}{x}$.

Наприклад, рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \sin \frac{y}{x} + 2 \quad \text{та} \quad \frac{dy}{dx} = \ln \frac{y}{x} + 3 \cdot e^{y/x} - \text{однорідні.}$$

Рівняння $y' = \frac{x^3 + x^2 y}{xy^2}$ також однорідне, оскільки при діленні

чисельника та знаменника правої частині рівняння на x^3 , отримаємо:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Зокрема, рівняння $y' = f(x, y)$ буде однорідним, якщо функція $f(x, y)$ являє собою відношення однорідних многочленів одного і того ж степеню, тобто у яких сума показників степеню змінних в кожному члені рівні.

Взагалі, в однорідному рівнянні змінні не можна розділити. Однак його легко можна перетворити в рівняння з розподільними змінними.

З цією метою введемо нову функцію t , позначивши $\frac{y}{x} = t$ або $y = t \cdot x$.

Маємо $y' = t' \cdot x + t$. Тоді рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ набуде вигляду:

$$t' \cdot x + t = f(t) \quad \text{або} \quad x \frac{dt}{dx} + t = f(t).$$

В отриманому рівнянні змінні можна розділити. Дійсно,

$$xdt = (f(t) - t)dx$$

і припустивши, що $f(t) - t \neq 0$, маємо

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + C.$$

Проінтегрувавши ліву частину та повертаючись до початкової змінної y , отримаємо загальний розв'язок однорідного рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Відповідно до вищезгаданого позначимо $\frac{y}{x} = t$, тоді

$y = t \cdot x$ та $y' = t'x + t$. Наше диференціальне рівняння набуває вигляду $t' \cdot x + t = t \cdot \ln t$, а це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Зробимо відповідні перетворення:

$$t' \cdot x = t \cdot \ln t - t, \quad \frac{dt}{dx} x = t(\ln t - 1), \quad \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}. \quad \text{Проінтегруємо}$$

обидві частини:

$$\ln|\ln t - 1| = \ln|Cx| \Rightarrow \ln t - 1 = Cx \Rightarrow \ln t = Cx + 1 \Rightarrow t = e^{Cx+1}.$$

Повертаємось до початкової змінної $\frac{y}{x} = e^{Cx+1} \Rightarrow y = x \cdot e^{Cx+1}$ –

загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Відповідь: $y = x \cdot e^{Cx+1}$.

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Слід звернути увагу на те, що визначити вид диференціального рівняння простіше тоді, коли коефіцієнт при y' дорів-

ное 1. Зробимо перетворення та перепишемо рівняння таким чином:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \quad \text{або} \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - \text{це рівняння повністю відпо-}$$

відає загальному вигляду однорідного диференціального рівняння першого порядку, а саме $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Здійснимо заміну змінної $\frac{y}{x} = t$, $y = t \cdot x$, $y' = t'x + t$, тоді рівняння набуде вигляду $t' \cdot x + t = t + \sqrt{1 + t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + t^2}$. Розділимо змінні та проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| = \ln|Cx|$$

і повернемося до початкової змінної $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = Cx$.

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2 - \text{загальний розв'язок.}$$

$$\text{Відповідь: } y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $2xyu' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Виконуючи підстановку $y = tx$, маємо:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x + t = \frac{1 + t^2}{2t} \quad \text{або} \quad \frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{1 + t^2}{2t} - t, \quad \frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

В отриманому рівнянні розділимо змінні:

$$\frac{2tdt}{1-t^2} = \frac{dx}{x}$$

та проінтегруємо обидві частини. В результаті отримаємо:

$$\ln C_1 - \ln|1-t^2| = \ln|x|,$$

звідки

$$\ln C_1 = \ln|1-t^2| + \ln|x| \text{ або } \ln C_1 = \ln\left(\left|1-t^2\right| \cdot |x|\right).$$

Таким чином,

$$C_1 = |x| \cdot |1-t^2| \text{ або } x(1-t^2) = \pm C_1.$$

Позначимо $\pm C_1 = C$, тоді $x(1-t^2) = C$.

Повертаючись до функції y , отримаємо:

$$C = x \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \text{ або } x^2 - y^2 - Cx = 0.$$

Це і є розв'язок заданого диференціального рівняння.

Відповідь: $x^2 - y^2 - Cx = 0$.

Приклад 10. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \text{ за умови } y(1) = 0.$$

Розв'язання. Для того, щоб переконатися, що дане рівняння є однорідним першого порядку, приведемо його до виду $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Для цього здійснимо деякі перетворення, а саме розділимо обидві частини на x : $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1$. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = t$, $y = t \cdot x$, $y' = t'x + t$.

Рівняння набуде вигляду: $(t' \cdot x + t - t) \operatorname{arctg} t = 1 \Rightarrow t' \cdot x \cdot \operatorname{arctg} t = 1$,

$\operatorname{arctg} t \cdot dt = \frac{dx}{x}$. Проінтегруємо обидві його частини:

$$\int \operatorname{arctg} t \cdot dt = \left| \begin{array}{l} U = \operatorname{arctg} t; \quad dU = \frac{dt}{1+t^2} \\ dV = dt; \quad V = t \end{array} \right| =$$

$$= t \cdot \operatorname{arctg} t - \int \frac{tdt}{1+t^2} = t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C_1.$$

Таким чином маємо:

$$t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln |1+t^2| = \ln |Cx| \Rightarrow t \cdot \operatorname{arctg} t = \ln |Cx\sqrt{1+t^2}|.$$

Повертаємось до початкової змінної: $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \left| Cx\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \right|$

або $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \left| C\sqrt{x^2+y^2} \right|$ – це і є загальний розв’язок рівняння.

Так як задана умова $y(1) = 0$, необхідно ці дані підставити в загальний розв’язок рівняння. Маємо: $\operatorname{arctg} 0 = \ln |C| \Rightarrow 0 = \ln C \Rightarrow C = 1$.

Значення $C = 1$ підставимо в загальний розв’язок. Тоді частинним розв’язком диференціального рівняння буде:

$$\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{або} \quad e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\text{Відповідь: } e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1.1.3. Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння виду $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$, де $P(x)$ та $Q(x)$ – неперервні функції, називається **лінійним диференціальним рівнянням**. Загальний розв’язок такого рівняння знаходиться у вигляді добутку двох функцій $y = U(x) \cdot V(x)$, залежних від x . Тобто нехай $y(x) = U(x) \cdot V(x)$. Очевидно, що тоді

$$y'(x) = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x).$$

Підставивши значення $y(x)$ та $y'(x)$ в початкове рівняння

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

маємо:

$$UV + UV' + UV \cdot P(x) = Q(x).$$

Після групування доданків отримаємо:

$$UV + U(V' + P(x)V) = Q(x).$$

Користуючись тим, що одна з невідомих функцій, наприклад $V(x)$, може бути вибрана довільно (оскільки тільки добуток $U(x)V(x)$ повинен задовольняти задане рівняння), за $V(x)$ можна прийняти будь-яке частинне розв'язання рівняння $V' + P(x) \cdot V = 0$ (наприклад, $V = e^{-\int P(x)dx}$), яке, відповідно, перетворює в 0 коефіцієнти при $U(x)$ в останньому рівнянні.

Таким чином, рівняння

$$U' \cdot V + U(V' + P(x) \cdot V) = Q(x)$$

набуває вигляду:

$$U' \cdot V = Q(x) \text{ або } U' = \frac{Q(x)}{V} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

звідки

$$U(x) = C + \int Q(x) \cdot e^{P(x)} dx.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння знаходимо як добуток $U(x) \cdot V(x)$, тобто

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{P(x)dx} + C \right).$$

Немає сенсу запам'ятовувати цю формулу, достатньо скористатись наведеним вище алгоритмом.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння лінійне, а тому, згідно з наведеним вище, маємо:

$$y = U \cdot V, \quad y' = U'V + UV',$$

тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$\begin{aligned}UV' + UV' + 2xUV &= xe^{-x^2}, \\UV' + U(V' + 2xV) &= xe^{-x^2}.\end{aligned}$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases}V' + 2xV = 0, \\U' \cdot V = xe^{-x^2}.\end{cases}$$

Розглянемо кожне з наведених рівнянь системи. При цьому стали інтегрування при знаходженні $V(x)$ покладемо рівною нулю, так як нас цікавить будь-який розв'язок, що відрізняється від нуля.

$$\begin{aligned}V' + 2xV = 0, \quad \frac{dV}{dx} &= -2xV, \\ \int \frac{dV}{V} &= -2 \int x dx, \quad \ln|V| = -x^2, \\ V &= e^{-x^2}.\end{aligned}$$

Тоді друге рівняння системи набуде вигляду:

$$\begin{aligned}U' \cdot V = x \cdot e^{-x^2}, \quad \frac{dU}{dx} e^{-x^2} &= x \cdot e^{-x^2}, \quad \int dU = \int x dx, \\ U &= \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Відповідно, } y = U \cdot V = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

$$\text{Відповідь: } y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

Приклад 12. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

Розв'язання. В даному випадку необхідно розділити обидві частини рівняння на вираз $(1+x^2)$ і тоді ми одержимо рівняння

$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$, яке повністю відповідає загальному вигляду лінійного

диференціального рівняння першого порядку.

Відповідно до вищезгаданого маємо:

$$y = U \cdot V, \quad y' = U'V + UV',$$

$$U'V + UV' - \frac{2xUV}{1+x^2} = 1+x^2$$

$$\text{або } U'V + U \left(V' - \frac{2xV}{1+x^2} \right) = 1+x^2.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' - \frac{2xV}{1+x^2} = 0, \\ U'V = 1+x^2. \end{cases}$$

Маємо:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2xV}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{2xdx}{1+x^2},$$

$$\ln|V| = \ln|1+x^2|, \quad V = 1+x^2.$$

Тоді:

$$\frac{dU}{dx}(1+x^2) = 1+x^2, \quad \int dU = \int dx, \quad U = x+C.$$

Таким чином, $y = U \cdot V = (x+C)(1+x^2)$.

Відповідь: $y = (x+C)(1+x^2)$.

Приклад 13. Розв'язати диференціальне рівняння, яке задовольняє початковим умовам:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad y(a) = b.$$

Розв'язання. Дане рівняння – лінійне, а тому загальний розв'язок будемо шукати у вигляді: $y = U \cdot V$, тоді $y' = U'V + UV'$.

Таким чином рівняння набуде вигляду:

$$UV + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{e^x}{x} \quad \text{або} \quad UV + U \left(V' + \frac{V}{x} \right) = \frac{e^x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + \frac{V}{x} = 0, \\ UV = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розглянемо кожне з рівняння окремо. А саме:

$$V' + \frac{V}{x} = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}, \quad \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|V| = -\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

тоді $V = \frac{1}{x}$.

Друге рівняння системи набуде вигляду $\frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$ або

$$dU = e^x dx, \quad \text{звідки} \quad U = \int e^x dx = e^x + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння буде:

$$y = U \cdot V = \frac{e^x + C}{x}.$$

Оскільки в умові рівняння задані початкові умови, то необхідно знайти частинний розв'язок диференціального рівняння. З умови відомо, що $y = b$ при $x = a$.

Використовуючи ці дані, маємо:

$$b = \frac{e^a + C}{a}, \quad e^a + C = ab, \quad C = -e^a + ab.$$

Відповідно: $y = \frac{e^x - e^a + ab}{x}$ – частинний розв'язок рівняння.

$$\text{Відповідь: } y = \frac{e^x - e^a + ab}{x}.$$

Приклад 14. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + a \cdot \sin 2y}.$$

Розв'язання. Це рівняння не є лінійним відносно y , оскільки y знаходиться під знаком синуса та косинуса. Однак доволі простими перетвореннями його можна привести до лінійного рівняння відносно x та x' :

$$\frac{dx}{dy} = x \cos y + a \sin 2y \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dy} - x \cos y = a \sin 2y.$$

Нехай $x(y) = U(y) \cdot V(y)$, тоді

$$x'(y) = U'(y) \cdot V(y) + U(y) \cdot V'(y).$$

Підставимо значення $x(y)$ та $x'(y)$ в рівняння:

$$U'(y) \cdot V(y) + U(y) \cdot V'(y) - U(y) V'(y) \cos y = a \sin 2y$$

та проведемо групування доданків:

$$U' \cdot V + U(V' - V \cdot \cos y) = a \cdot \sin 2y.$$

Можна записати:

$$V' - V \cdot \cos y = 0, \quad \frac{dV}{dy} - V \cdot \cos y = 0, \quad \frac{dV}{V} = \cos y dy.$$

Проінтегрувавши обидві частини останнього рівняння, отримаємо його частинний розв'язок, а саме:

$$\ln V = \sin y. \quad \text{Звідки} \quad V = e^{\sin y}.$$

З рівняння

$$U' \cdot V = a \cdot \sin 2y,$$

враховуючи, що $V = e^{\sin y}$, маємо:

$$\frac{dU}{dy} \cdot e^{\sin y} = a \cdot \sin 2y.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо:

$$dU = a \cdot \sin 2y \cdot e^{-\sin y} dy,$$

$$U(y) = \int a \cdot 2 \sin y \cdot \cos y \cdot e^{\sin y} dy = 2a \int \sin y \cdot \cos e^{-\sin y} dy + C.$$

За допомогою підстановки $\sin y = t$ та користуючись методом інтегрування частинами отримаємо:

$$U(y) = -2a(\sin y + 1) \cdot e^{-\sin y} + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння буде:

$$x(y) = U(y) \cdot V(y) = e^{\sin y} \cdot (-2a(\sin y + 1) \cdot e^{-\sin y} + C)$$

або після перетворення:

$$x(y) = -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}.$$

Відповідь: $x(y) = -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}.$

Приклад 15. Розв'язати рівняння $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Це рівняння не є лінійним відносно y та y' , але його можна переписати у вигляді:

$$2y \cdot x'_y - 6x = -y^2, \text{ так як } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \text{ тобто } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Таким чином, маємо: $x'_y - \frac{6x}{2y} = -\frac{y^2}{2y}$ або $x'_y - \frac{3x}{y} = -\frac{y}{2}$.

Позначимо $x = U \cdot V$, де $U = U(y)$ і $V = V(y)$ та $x' = U'V + UV'$.

Маємо:

$$U'V + UV' - \frac{3UV}{y} = -\frac{y}{2},$$

$$U'V + U \left(V' - \frac{3V}{y} \right) = -\frac{y}{2}.$$

Система рівнянь у даному випадку матиме вигляд:

$$\begin{cases} V' - \frac{3V}{y} = 0, \\ UV = -\frac{y}{2}. \end{cases}$$

Відповідно:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{3V}{y}, \quad \frac{dV}{V} = \frac{3dy}{y}, \quad \ln|V| = 3 \ln|y| = \ln|y|^3 \Rightarrow V = y^3.$$

Розглянемо друге рівняння системи:

$$UV = -\frac{y}{2}, \quad \frac{dU}{dy} \cdot y^3 = -\frac{y}{2}, \quad dU = -\frac{y}{2} \cdot \frac{dy}{y^3} \text{ або } dU = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{y^2}.$$

Звідки інтегруванням одержимо:

$$U = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y} \right) + C = \frac{1}{2y} + C.$$

Таким чином, $x = U \cdot V = y^3 \left(\frac{1}{2y} + C \right)$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

$$\text{Відповідь: } x = y^3 \left(\frac{1}{2y} + C \right).$$

1.1.4. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду $y' + P(x) \cdot y = Q(x)y^n$, де $n \neq 0, n \neq 1$ називається **рівнянням Бернуллі**. Якщо обидві частини цього рівняння поділити на y^n , а потім замінити $y^{-n+1} = z$, то одержимо рівняння $z' + P(x)(1-n) \cdot z = (1-n)Q(x)$, яке є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

На практиці немає сенсу проводити таку заміну, достатньо невідому функцію відразу записати у вигляді $y = U(x) \cdot V(x)$ та розв’язувати за наведеним вище зразком як лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Приклад 16. Розв’язати рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Розв’язання. Для зручності запишемо рівняння у вигляді

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln x}{x}, \text{ тоді } y = U \cdot V, \text{ а } y' = UV' + UV''.$$

Рівняння набуде вигляду:

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{U^2V^2 \ln x}{x},$$

$$UV + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = \frac{U^2V^2 \ln x}{x}.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' + \frac{V}{x} = 0, \\ UV = \frac{U^2V^2 \ln x}{x}, \end{cases}$$

та розв'яжемо кожне з рівнянь:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}, \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|V| = -\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|, \quad V = \frac{1}{x}.$$

Тоді друге рівняння системи буде:

$$\frac{dU}{dx} \cdot V = \frac{U^2V^2 \ln x}{x}, \quad \frac{dU}{U^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad -\frac{1}{U} = -\frac{\ln x + 1 + Cx}{x}, \quad U = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}.$$

$$\text{Відповідно } y = U \cdot V = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання. Позначимо $y = U \cdot V$, тоді $y' = U'V + UV'$. Маємо:

$$U'V + UV' + \frac{2UV}{x} = \frac{2\sqrt{U} \cdot \sqrt{V}}{\cos^2 x}, \quad UV + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = \frac{2\sqrt{U} \cdot \sqrt{V}}{\cos^2 x}.$$

Запишемо систему рівнянь:
$$\begin{cases} V' + \frac{2V}{x} = 0, \\ UV' = \frac{2\sqrt{U} \cdot \sqrt{V}}{\cos^2 x}, \end{cases}$$

та розв'яжемо кожне з цих рівнянь:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{2V}{x}, \quad \frac{dV}{V} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln|V| = -2\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right|, \quad \text{тоді:}$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2\sqrt{U}}{x \cos^2 x}, \quad \frac{dU}{2\sqrt{U}} = \frac{xdx}{\cos^2 x}, \quad \sqrt{U} = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C,$$

$$U = (x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C)^2.$$

Таким чином, $y = \frac{(x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C)^2}{x^2}$. Звідки:

$$y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x} \right)^2 -$$

загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x} \right)^2$



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ



1. Яке рівняння носить назву диференціального?
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. В чому полягає геометричний зміст загального та частинного розв'язку диференціального рівняння?
5. В чому полягає зміст задачі Коші?
6. Чим відрізняються диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними від рівнянь з відокремленими змінними?
7. Які рівняння називаються однорідними диференціальними рівняннями? Яка підстановка використовується при розв'язанні таких рівнянь?

8. Які диференціальні рівняння називаються лінійними першого порядку? Яка підстановка при цьому використовується?

9. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі? Яка може бути використана підстановка при його розв'язанні?



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ



З'ясувати тип диференціального рівняння та знайти його відповідно загальний чи частинний розв'язок.

1. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2} dy = 0;$

6. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y;$

2. $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0;$

7. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x;$

3. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0;$

8. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$

4. $(1 + x^2)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0,$

9. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0;$

$y(1) = -1;$

5. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0;$

10. $xy' - y = y^2 e^{2x}.$

Відповіді:

1. $\frac{y^2}{2} + \ln|y| = C - \frac{1}{3}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}};$

7. $y = x \arcsin \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$

2. $1 + y^2 = C(1 + x^2);$

8. $y = \frac{x + C}{\cos x};$

3. $x - y + \ln|xy| = C;$

9. $y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| - 1);$

4. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \left(1 + \ln \left| \frac{x}{y} \right| \right);$

10. $y = -\frac{2x}{e^{2x} + C}.$

5. $x + y = Ce^{-\frac{x+y}{x}};$

6. $y = 2x \operatorname{arctg}(Cx);$

1.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

1.2.1. Диференціальне рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$

Розв'язання такого рівняння знаходиться n -кратним інтегруванням, а саме:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1) dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

.....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot x + C_n,$$

де

$$f_n(x) = \underbrace{\int \int \int \dots \int}_{n \text{ разів}} f(x) \cdot dx^n.$$

Оскільки

$$\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!}, \dots$$

є сталі величини, то загальний розв'язок може бути записано так:

$$y = f_n(x) + C_1 \cdot x^{n-1} + C_2 \cdot x^{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot x + C_n.$$

Приклад 18. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. $y' = \int \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} dx = \int 2(\sin x)^{-3} \cdot d(\sin x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1,$

Далі $y = \int \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + C_1 \right) dx$. Звідки $y = \text{ctg } x + C_1 x + C_2$ – загаль-

ний розв'язок рівняння.

Відповідь: $y = \text{ctg } x + C_1 x + C_2$.

Приклад 19. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' = \sin 3x - 4e^{-x}.$$

Розв'язання. $y' = \int (\sin 3x - 4e^{-x}) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + 4e^{-x} + C_1.$

Далі $y = \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + 4e^{-x} + C_1 \right) dx$. Загальний розв'язок рівняння:

$$y = -\frac{1}{9} \sin 3x - 4e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{9} \sin 3x - 4e^{-x} + C_1 x + C_2.$

Приклад 20. Для даного диференціального рівняння $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$ знайти частинний розв'язок, що задовольняє $y|_{x=0} = 1,$

$$y'|_{x=0} = 2, \quad y''|_{x=0} = -1.$$

Розв'язання. Як відомо,

$$\begin{aligned} y''(x) &= \int y'''(x) dx = 24 \int \frac{dx}{(x+2)^5} = 24 \int (x+2)^{-5} dx = \\ &= 24 \frac{(x+2)^{-4}}{-4} + C_1 = -6(x+2)^{-4} + C_1. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int y''(x) dx = \int \left(-6(x+2)^{-4} + C_1 \right) dx = -6 \int (x+2)^{-4} dx + C_1 \int dx = \\ &= -6 \cdot \frac{(x+2)^{-3}}{-3} + C_1 \cdot x + C_2 = 2(x+2)^{-3} + C_1 \cdot x + C_2. \end{aligned}$$

Отже,

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int \left(2(x+2)^{-3} + C_1 \cdot x + C_2 \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int (x+2)^{-3} dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx = 2 \frac{(x+2)^{-2}}{-2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \\
&= -\frac{1}{(x+2)^2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}$$

Послідовно підставивши в отримані вирази для $y''(x)$, $y'(x)$ та $y(x)$ початкові умови, отримаємо значення C_1 , C_2 , C_3 :

$$-1 = \frac{6}{24} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{8}; \quad 2 = \frac{2}{2^3} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{4};$$

$$1 = -\frac{1}{2^2} + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{5}{4}.$$

Отже, частинний розв'язок такого рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } y(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}.$$

1.2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які не містять шукану функцію

Загальний вигляд такого рівняння

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Рівняння не містить невідому функцію y та її похідні до $(n-1)$ -го порядку. Для визначення розв'язку такого рівняння необхідно ввести нову функцію $P(x) = y^{(n-1)}$ та, відповідно, $P'(x) = y^{(n)}$.

В результаті отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $F(x, P, P') = 0$, де в ролі невідомої функції буде функція $P(x)$.

В частинному випадку, коли $n = 2$, диференціальне рівняння другого порядку $F(x, y', y'') = 0$, яке не містить невідомої функції y , можна записати, як $y'' = f(x, y')$.

Позначимо $y' = P(x)$ і помічаючи, що $y'' = P'(x)$, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $P(x)$, а саме:

$$P' = f(x, P).$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок цього рівняння:

$$P(x) = \varphi(x, C_1).$$

Змінюючи в цьому розв'язку функцію $P(x)$ на y' , отримаємо:

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Звідки загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Приклад 21. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x.$$

Розв'язання. Позначимо $y' = P(x)$, тоді $y'' = \frac{dP}{dx}$. Маємо

$P' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot P = \sin^3 x$. Одержане рівняння є типовим представником лінійного диференціального рівняння першого порядку, а тому позначимо $P = U \cdot V$, $P' = U'V + UV'$.

В результаті даних позначень рівняння набуває вигляду:

$$UV' + UV' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot U \cdot V = \sin^3 x,$$

$$U'V + U(V' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot V) = \sin^3 x.$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} V' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot V = 0, \\ UV' = \sin^3 x, \end{cases}$$

та послідовно розглянемо рівняння:

$$\frac{dV}{dx} = 2 \operatorname{ctg} x V \Rightarrow \frac{dV}{V} = 2 \operatorname{ctg} x dx,$$

$$\ln |V| = 2 \ln |\sin x| = \ln |\sin^2 x| \Rightarrow V = \sin^2 x.$$

Перейдемо до другого рівняння:

$$\frac{dU}{dx} V = \sin^3 x \Rightarrow \frac{dU}{dx} \sin^2 x = \sin^3 x \Rightarrow dU = \sin x dx \Rightarrow U = C_1 - \cos x.$$

Таким чином, $P = UV = (C_1 - \cos x) \sin^2 x$, $y' = (C_1 - \cos x) \sin^2 x$.

Інтегруванням знайдемо саму функцію y :

$$\begin{aligned} y &= \int (C_1 - \cos x) \sin^2 x dx = C_1 \int \sin^2 x dx - \int \sin^2 x \cos x dx = \\ &= C_1 \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \int (\sin x)^2 d(\sin x). \end{aligned}$$

Таким чином, $y = \frac{C_1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2$ – загальний

розв'язок диференціального рівняння.

$$\text{Відповідь: } y = \frac{C_1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2.$$

Приклад 22. Розв'язати рівняння $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$.

Розв'язання. Позначимо $y' = P(x)$, тоді $y'' = \frac{dP}{dx}$. Маємо:

$$P' = \frac{P}{x} \ln \frac{P}{x}.$$

Дане рівняння являє собою однорідне диференціальне рівняння першого порядку, а тому позначимо $\frac{P}{x} = t \Rightarrow P = t \cdot x \Rightarrow P' = t' \cdot x + t$.

Таким чином маємо:

$$t' \cdot x + t = t \ln t \Rightarrow t' \cdot x = t(\ln t - 1) \Rightarrow \frac{dt}{dx} x = t(\ln t - 1),$$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\ln t - 1| = \ln|C_1 x| \Rightarrow \ln t - 1 = C_1 x \Rightarrow \ln t = C_1 x + 1 \Rightarrow t = e^{C_1 x + 1}.$$

Повернемо до початкової змінної:

$$\frac{P}{x} = e^{C_1 x + 1}, \quad P = x e^{C_1 x + 1} \Rightarrow y' = x e^{C_1 x + 1}, \quad y = \int x e^{C_1 x + 1} dx = \left| \begin{array}{l} U = x, \quad dV = e^{C_1 x + 1} dx \\ dU = dx, \quad V = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \end{array} \right|,$$

$y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x + 1} dx = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

$$\text{Відповідь: } y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} \int e^{C_1 x + 1} dx = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2.$$

Приклад 23. Розв’язати рівняння $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$ за умови, що $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

Розв’язання. Нехай $y' = P(x)$, тоді $y'' = P'(x)$. Підставивши ці вирази в задане рівняння, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$(1 + x^2) \cdot P' - 2xP = 0.$$

Розділивши в цьому рівнянні змінні, отримаємо:

$$\frac{dP}{P} = \frac{2x dx}{1 + x^2}.$$

Проінтегрувавши обидві частини, отримаємо:

$$\ln|P| = \ln|1 + x^2| + \ln C_0 \quad \text{або} \quad \ln|P| = \ln|C(1 + x^2)|.$$

Після потенціювання маємо:

$$P = \pm C(1 + x^2) = C_1(1 + x^2).$$

Оскільки $P = y'$, то маємо:

$$y' = C_1(1 + x^2).$$

Отримано диференціальне рівняння першого порядку з розподі-
льними змінними:

$$dy = C_1(1+x^2)dx.$$

Проінтегрувавши ще раз, отримаємо загальний розв'язок даного
рівняння:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Виділимо з цього загального розв'язку частинний. Користую-
чись першою початковою умовою $y|_{x=1} = 0$, знайдемо:

$$0 = C_1\left(1 + \frac{1}{3}\right) + C_2 \text{ або } \frac{4}{3}C_1 + C_2 = 0.$$

Враховуючи, що

$$y' = C_1(1+x^2),$$

а друга початкова умова $y'|_{x=1} = 1$, маємо:

$$1 = C_1(1+1), \text{ звідки } C_1 = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, для визначення сталих C_1 та C_2 маємо систему:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3}C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки, $C_2 = -\frac{2}{3}$. Таким чином, шуканий частинний розв'язок

має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}.$$

**1.2.3. Диференціальні рівняння вищих порядків,
що не містять незалежну змінну**

Загальний вигляд такого рівняння:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок такого диференціального рівняння можна понизити, якщо позначити $y' = P$, а за новий аргумент прийняти сам y . В цьому випадку y'' , y''' , ... будуть мати вигляд за формулами:

$$y'' = P \frac{dP}{dy}, \quad y''' = P \left(P \frac{d^2P}{d^2y} + \left(\frac{dP}{dy} \right)^2 \right), \dots$$

(їх отримаємо за правилом диференціювання складної функції) через P та похідні від P по y . При цьому порядок рівняння знизиться на одиницю. Якщо ж маємо справу з рівнянням

$$F(y, y', y'') = 0,$$

то тоді маємо $y' = P(y)$, а

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dP(y)}{dx} = \frac{dP(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left\| y' = \frac{dy}{dx} = P(y) \right\| = P \cdot \frac{dP}{dy}.$$

Приклад 24. Розв'язати рівняння $1 + (y')^2 = 2yy''$.

Розв'язання. Це рівняння належить до даного типу рівнянь, а тому позначимо $y' = P(y)$, $y'' = P \frac{dP}{dy}$, в результаті задане рівняння набуде

вигляду: $1 + P^2 = 2yP \frac{dP}{dy}$.

Розділимо змінні, тоді рівняння буде:

$$\frac{2PdP}{1+P^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|1+P^2| = \ln|C_1y| \Rightarrow 1+P^2 = C_1y;$$

$$P^2 = C_1y - 1 \Rightarrow P = \pm \sqrt{C_1y - 1}.$$

Нагадаємо, що $P(y) = y'$, тоді $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$ або

$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx$. Інтегруючи обидві частини рівняння маємо:

$$\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = C_2 \pm x \Rightarrow (C_2 \pm x)^2 = \frac{4}{C_1^2} (C_1 y - 1) \text{ або}$$

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} \Rightarrow y = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4C_1} + \frac{1}{C_1},$$

$$y = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} + \frac{1}{C_1} \text{ - загальний розв'язок диференціального}$$

рівняння.

$$\text{Відповідь: } y = \frac{C_1^2 (C_2 \pm x)^2}{4} + \frac{1}{C_1}.$$

Приклад 25. Розв'язати рівняння $2y'' = 3y^2$ за умови $y(-2) = 1, y'(-2) = -1$.

Розв'язання. В даному випадку також позначимо $y' = P(y), y'' = P \frac{dP}{dy}$. Тоді:

$$2P \frac{dP}{dy} = 3y^2 \Rightarrow 2PdP = 3y^2 dy \Rightarrow P^2 = y^3 + C_1,$$

$$P = \pm\sqrt{y^3 + C_1} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{y^3 + C_1}.$$

Доречно згадати про початкові умови $y(-2) = 1, y'(-2) = -1$, тоді $-1 = \pm\sqrt{1 + C_1}$. Очевидно, що $C_1 = 0$, тобто можна записати $y' = -\sqrt{y^3}$.

Знайдемо y з одержаного рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y^3} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^3}} = -dx \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{y}} = -x + C_2,$$

$$-2 = 2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -4.$$

Таким чином, $\frac{-2}{\sqrt{y}} = -x - 4$, $\frac{2}{\sqrt{y}} = x + 4$, $\frac{4}{y} = (x + 4)^2$.

$y = \frac{4}{(x + 4)^2}$ – розв’язок диференціального рівняння, що відповідає початковим умовам.

Відповідь: $y = \frac{4}{(x + 4)^2}$.



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ



1. Яким методом розв’язується рівняння $y^{(n)} = f(x)$?
2. Як записується загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку, що не містить явно невідому функцію $y(x)$?
3. За допомогою якої заміни можна знизити порядок такого рівняння?
4. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежну змінну x ?
5. Якою заміною слід скористатись в такому випадку?



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ



З’ясувати тип диференціального рівняння та знайти його відповідно загальний чи частинний розв’язок.

1. $y'' = 2x$;

4. $y'' = \frac{y'}{x} + x$;

2. $y \cdot y'' = (y')^2$;

5. $yy'' + (y')^2 = 1$;

3. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

6. $2y(y')^3 + y'' = 0$,

$y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Відповіді:

1. $y = \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2;$

2. $y = C_2 \cdot e^{C_1x};$

3. $y = (C_1x - C_1^2) \cdot e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2;$

4. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2;$

5. $y^2 = (x + C_2)^2 - C_1;$

6. $y^3 - y = 3x.$

1.3. Елементи загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь

Рівняння виду

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n \cdot y = f(x),$$

що містить деяку невідому функцію y та її похідні до n -ого порядку включно в першому степені, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n -ого порядку.

Коефіцієнти $P_k(x)$, де $k = 0, 1, \dots, n$ рівняння та його праву частину $f(x)$ будемо вважати неперервними функціями на деякому інтервалі (a, b) .

Якщо припустити, що $f(x) = 0$, то отримаємо рівняння

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = 0,$$

яке називається лінійним однорідним рівнянням або рівнянням без правої частини, що відповідає неоднорідному рівнянню.

Має сенс нагадати, що лінійною комбінацією функцій y_1, y_2, \dots, y_n називають функцію

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

яка утворена з заданих функцій за допомогою лінійних операцій над ними.

Систему функцій y_1, y_2, \dots, y_n , визначених на (a, b) , називають **лінійно залежною на цьому інтервалі**, якщо можна підібрати числа C_1, C_2, \dots, C_n , не всі рівні нулю та такі, що лінійна комбінація

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \text{ для } x \in (a, b).$$

Виконання такої умови означає, що хоча б одну з заданих функцій можна виразити лінійно через решту функцій.

Система функцій y_1, y_2, \dots, y_n , визначених на (a, b) , називається **лінійно незалежною** на цьому інтервалі, якщо лінійна комбінація

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0$$

тоді і тільки тоді, коли $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

У цьому випадку жодну із заданих функцій не можна лінійно виразити через решту функцій.

Лінійну залежність та незалежність системи функцій y_1, y_2, \dots, y_n можна встановити за допомогою спеціального визначника, який називається **визначником Вронського** або **вронськіаном**:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Доречно нагадати дві теореми.

Теорема 1. Якщо функції y_1, y_2, \dots, y_n – лінійно залежні на (a, b) , то

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv 0.$$

Теорема 2. Якщо функції y_1, y_2, \dots, y_n – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння з неперервними коефіцієнтами – лінійно незалежні на (a, b) , то і визначник Вронського не обертається в нуль ні в одній точці цього інтервалу, тобто

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0.$$

Будь-яка сукупність n лінійно незалежних на інтервалі (a, b) частинних рішень y_1, y_2, \dots, y_n лінійного однорідного диференціального рівняння n -ого порядку називається **фундаментальною системою розв'язків (ФРС)** цього рівняння.

Теорема 3. Якщо функції y_1, y_2, \dots, y_n утворюють ФРС лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР) n -ого порядку, то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y_{z.o} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

$$\text{де } C_1, C_1, \dots, C_n - \text{const.}$$

Як правило, лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n -ого порядку зі сталими коефіцієнтами записують у вигляді

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x),$$

де коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n – дійсні числа, а $f(x)$ – права частина рівняння, яка залежить від аргументу x .

Такому рівнянню відповідає однорідне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0.$$

Для знаходження частинних рішень цього рівняння необхідно попередньо визначити їх можливий вигляд, виходячи з того, що доданки в лівій частині рівняння повинні взаємно знищуватись. Такими властивостями володіє функція $y = e^{kx}$. Звідки

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx}.$$

Якщо підставити ці вирази в однорідне рівняння, матимемо

$$e^{kx} (k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot k + a_n) = 0,$$

але, оскільки $e^{kx} \neq 0$, отримаємо

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0.$$

Це рівняння носить назву *характеристичного рівняння*.

Теорема 4. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР (ЛНДР) $y_{з.н}$ складається із суми $y_{з.о}$ та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{ч.н}$: $y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}$.

1.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами a_1, a_2, a_3 має вигляд $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$.

Відомо, якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв’язки такого рівняння (в лінійній незалежності можна переконатись за допомогою визначника Вронського), то вони утворюють фундаментальну систему розв’язків (ФСР).

Для знаходження частинних розв’язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ необхідно спочатку записати відповідне характеристичне рівняння

$$a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0$$

та знайти його корені (формули для розв’язання квадратних рівнянь наведено на стор. 131).

При розв’язанні квадратного рівняння можливі три випадки:

№ з/п	Корені рівняння	Частинні розв’язки, що утворюють ФСР	Загальний розв’язок
1.	Дійсні різні $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_{3.0} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2.	Дійсні рівні $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x \cdot e^{k_1 x}$	$y_{3.0} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$
3.	Комплексно-спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y_{3.0} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Загальний розв'язок ЛОДР, згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного рівняння, має вигляд:

$$y_{3,0} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Приклад 26. Розв'язати рівняння $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння

$$3k^2 + 5k - 2 = 0, \text{ його корені } k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}, k_1 = -2, k_2 = \frac{1}{3}$$

дійсні та різні. Відповідно, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{\frac{1}{3}x}$ – частинні розв'язки, а

$y_{3,0} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

$$\text{Відповідь: } y_{3,0} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}.$$

Приклад 27. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння буде $k^2 + 6k + 9 = 0$, а тому $k_{1,2} = -3$ (дійсні та рівні корені), відповідно $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = x e^{-3x}$.

$$\text{Отже, } y_{3,0} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

$$\text{Відповідь: } y_{3,0} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад 28. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Розв'язання. В цьому випадку характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 13 = 0$, а його корені $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Відповідно до наведеної вище таблиці $\alpha = 3$, $\beta = 2$ та $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$.

$$\text{Таким чином, } y_{3,0} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

$$\text{Відповідь: } y_{3,0} = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Приклад 29. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \text{ за умови } y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Розглянемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 29 = 0.$$

Його корені $k_{1,2} = -2 \pm 5i$. Тоді ($\alpha = -2$, $\beta = 5$) $y_1 = e^{-2x} \cos 5x$ та $y_2 = e^{-2x} \sin 5x$, а $y_{3.o.} = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Скористаємось початковою умовою $y(0) = 3$, а саме замість x та y підставимо їх значення в загальний розв'язок однорідного рівняння.

Маємо $3 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \Rightarrow 3 = C_1$.

Обчислимо:

$$y'_{3.o.} = -2e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-2x}(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x),$$

а далі у цей вираз підставимо $x = 0$ та $y' = -1$. Тоді:

$$-1 = -2(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + (-5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0),$$

$$\text{тобто } -1 = -2C_1 + 5C_2.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 3, \\ -2C_1 + 5C_2 = -1, \end{cases} \text{ звідки } C_2 = 1.$$

Отже розв'язок рівняння, що відповідає заданим початковим умовам буде:

$$y = e^{-2x}(3 \cos 5x + \sin 5x).$$

Відповідь: $y = e^{-2x}(3 \cos 5x + \sin 5x)$.

У випадку ЛОДР n -ого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

необхідно

- 1) записати відповідне характеристичне рівняння;
- 2) визначити його корені;
- 3) враховуючи характер коренів записати частинні лінійно незалежні розв'язки, керуючись тим, що:

*) кожному дійсному однократному кореню k відповідає частинний розв'язок e^{kx} ;

**) кожному дійсному кореню k кратності r відповідає r лінійно незалежних частинних рішень e^{kx} , xe^{kx} , x^2e^{kx} , ..., $x^{r-1} \cdot e^{kx}$;

**) кожній парі комплексно спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ відповідає два частинних розв'язка $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ та $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

4) визначивши n лінійно незалежних частинних розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n за теоремою про структуру загального розв'язку однорідного рівняння записуємо загальний розв'язок:

$$y_{3,0} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Приклад 30. Розв'язати диференціальне рівняння $y''' + 25y' = 0$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння буде

$$k^3 + 25k = 0,$$

$$k(k^2 + 25) = 0,$$

$$k_1 = 0, k^2 + 25 = 0, k^2 = -25, k_{2,3} = \pm 5i.$$

Тоді

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, y_2 = \cos 5x, y_3 = \sin 5x.$$

Таким чином,

$$y_{3,0} = C_1 + C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x.$$

Відповідь: $y_{3,0} = C_1 + C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x$.

Приклад 31. Розв'язати диференціальне рівняння $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^3 - 2k^2 - 7k - 4 = 0.$$

Як відомо з шкільного курсу, будь-який цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена. Легко переконатись, що при $k = 4$ цей многочлен третього степеня обертається в 0.

Таким чином, многочлен $k^3 - 2k^2 - 7k - 4$ ділиться на $(k - 4)$ націло, тобто без остачі, а саме:

$$\begin{array}{r} \frac{-k^3 - 2k^2 - 7k - 4}{k^3 - 4k^2} \Bigg| \frac{k - 4}{k^2 + 2k + 1} \\ \underline{-2k^2 - 7k - 4} \\ \frac{2k^2 - 8k}{k^2 + 2k + 1} \\ \underline{-k - 4} \\ \frac{k - 4}{k - 4} \\ 0 \end{array}$$

Можна записати

$$k^3 - 2k^2 - 7k - 4 = (k - 4)(k^2 + 2k + 1) = (k - 4)(k + 1)^2.$$

Маємо корені: $k_1 = 4$, $k_{2,3} = -1$.

Очевидно, що лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = xe^{-x}.$$

Саме вони і утворюють ФСР.

Отже,

$$y_{3,0} = C_1 e^{4x} + e^{-x} (C_2 + C_3 x).$$

Відповідь: $y_{3,0} = C_1 e^{4x} + e^{-x} (C_2 + C_3 x)$.

Приклад 32. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0.$$

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^4 + 2k^3 - 2k - 1 = 0,$$

але

$$\begin{aligned} k^4 + 2k^3 - 2k - 1 &= (k^4 - 1) + 2k(k^2 - 1) = (k^2 - 1)(k^2 + 1) + 2k(k^2 - 1) = \\ &= (k^2 - 1)(k^2 + 1 + 2k) = (k^2 - 1)(k + 1)^2 = (k - 1)(k + 1)^3. \end{aligned}$$

Звідки маємо корені:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = k_4 = -1.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні, але корінь -1 кратності 3.

Фундаментальна система рішень має вигляд:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = x \cdot e^{-x}, \quad y_4 = x^2 \cdot e^{-x},$$

а, отже, загальний розв'язок рівняння такий:

$$y_{3,0} = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) \cdot e^{-x}.$$

Відповідь: $y_{3,0} = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) \cdot e^{-x}.$

Приклад 33. Розв'язати диференціальне рівняння $y^{IV} + 6y'' + 5y = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^4 + 6k^2 + 5 = 0.$$

Дане рівняння є бікватратним. Отже, нехай $t = k^2$, $t^2 = k^4$. Тоді

$$t^2 + 6t + 5 = 0,$$

звідки

$$t_1 = -1, \quad t_2 = -5.$$

Маємо

$$k^2 = -1, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i;$$

$$k^2 = -5, \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i.$$

При цьому лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = \sin \sqrt{5}x, \quad y_4 = \cos \sqrt{5}x.$$

Таким чином,

$$y_{3,0} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \sin \sqrt{5}x + C_4 \cos \sqrt{5}x.$$

Відповідь: $y_{3,0} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \sin \sqrt{5}x + C_4 \cos \sqrt{5}x.$

Приклад 34. Розв'язати диференціальне рівняння $y''' + 15y'' + 75y' + 125y = 0.$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння:

$$k^3 + 15k^2 + 75k + 125 = 0.$$

Легко помітити, що скориставшись формулою скороченого множення, можна записати $(k + 5)^3 = 0$, звідки випливає, що $k_{1,2,3} = -5$.

Лінійно незалежні розв'язки будуть такі:

$$y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = xe^{-5x}, \quad y_3 = x^2 \cdot e^{-5x}.$$

Отже,

$$y_{3.0} = e^{-5x} (C_1 + C_2x + C_3x^2).$$

Відповідь: $y_{3.0} = e^{-5x} (C_1 + C_2x + C_3x^2).$



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ



1. Який загальний вигляд має лінійне рівняння n -ого порядку?
2. Чим відрізняються ЛОДР від ЛНДР?
3. В чому полягає різниця між лінійною залежністю та лінійною незалежністю функцій?
4. Який вигляд має визначник Вронського?
5. За допомогою якої властивості вронскіана можна з'ясувати лінійну залежність або незалежність функцій?
6. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку; n -ого порядку.
7. Що являє собою характеристичне рівняння? Як його можна отримати із заданого диференціального рівняння.
8. Перелічить три випадки коренів характеристичного рівняння для диференціального рівняння другого порядку та запишіть загальний розв'язок для кожного з цих випадків.
9. Сформулюйте алгоритм розв'язання ЛОДУ n -ого порядку



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ



З'ясувати тип диференціального рівняння та знайти його відповідно загальний чи частинний розв'язок.

- | | |
|--|--|
| 1. $3y'' - 2y' - 8y = 0;$ | 5. $y'' + 4y' - 29y = 0,$
$y(0) = 0, y'(0) = 15;$ |
| 2. $y'' - 6y' + 9y = 0;$ | 6. $4y'' + 4y' + y = 0,$
$y(0) = 2, y'(0) = 0.$ |
| 3. $y'' - 16y = 0;$ | |
| 4. $2y'' + y' + 2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ y = 0;$ | |

Відповіді:

1. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$;

2. $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$;

3. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$;

4. $y = e^{-\frac{1}{4}x} (C_1 + C_2 x)$;

5. $y = 3e^{-2x} \sin 5x$;

6. $y = e^{-\frac{x}{2}} (x + 2)$.

1.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

1.5.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду

Загальний вигляд такого рівняння:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x), \text{ де } f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

а $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степені m та n .

Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{3,n} = y_{3,o} + y_{ч,n}$, де $y_{3,o}$ одержуємо розглянувши відповідне рівняння $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{ч,n} = e^{\alpha x} (M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x) \cdot x^s.$$

В даному випадку $k = \max \{m, n\}$, $M_k(x)$, $N_k(x)$ – многочлени степеню k з невідомими коефіцієнтами.

Якщо так зване *контрольне число* $\gamma = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $s = 0$, в іншому випадку число s визначає, з якою кількістю коренів характеристичного рівняння співпадає γ .

Приклад 35. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння, відповідно до теореми про структуру загального розв'язку ЛНДР, знаходимо у вигляді:

$$y_{3,n} = y_{3,o} + y_{ч,n}.$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y = 0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, корені якого будуть $k_{1,2} = \pm 2i$. Звідки можна записати:

$$y_{3,o} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина заданого рівняння має спеціальний вигляд, причому контрольне число $\gamma = \alpha + \beta i = 0$ не є коренем характеристичного

рівняння. А тому $y_{\text{ч.н}} = Ax + B$. Для обчислення коефіцієнтів A та B знайдемо похідні $y'_{\text{ч.н}} = A$ і $y''_{\text{ч.н}} = 0$ та підставимо їх значення в умову диференціального рівняння $4(Ax + B) = x$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4A = 1, \\ 4B = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0.$$

Отже, $y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{4}x$, відповідно $y_{\text{з.н}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$.

Приклад 36. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' = 2 - 3x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо у вигляді: $y_{\text{з.н}} = y_{\text{з.о}} + y_{\text{ч.н}}$.

Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - 3y' = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 - 3k = 0$, корені якого будуть $k_1 = 0$ та $k_2 = 3$. Отже $y_{\text{з.о}} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Права частина заданого рівняння є спеціального виду. де $\alpha = 0, \beta = 0, f(x) = 2 - 3x$. Контрольне число $\gamma = 0$ та дорівнює одному кореню характеристичного рівняння. Таким чином, $y_{\text{ч.н}}$ можна підібрати за правою частиною, тобто:

$$y_{\text{ч.н}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

Коефіцієнти A та B знаходимо вже відомим методом:

$$y'_{\text{ч.н}} = 2Ax + B, y''_{\text{ч.н}} = 2A.$$

$$2A - 3(2Ax + B) = 2 - 3x,$$

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 3x,$$

$$\left. \begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6A = -3 \\ 2A - 3B = 2 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{3}.$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$, а $y_{\text{з.н}} = C_1 + C_2e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Відповідь: $y_{\text{з.н}} = C_1 + C_2e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$

Приклад 37. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язання. Як відомо, $y_{\text{з.н}} = y_{\text{з.о}} + y_{\text{ч.н}}$. Знайдемо $y_{\text{з.н}}$:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3 \Rightarrow y_{\text{з.о}} = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

Визначимо контрольне число:

$$\gamma = \alpha + \beta i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0, \quad \gamma \neq k_{1,2}.$$

Отже, $y_{\text{ч.н}} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо $y'_{\text{ч.н}} = 2Ax + B$, $y''_{\text{ч.н}} = 2A$

та підставимо ці вирази у задане диференціальне рівняння:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3,$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \left\{ \begin{array}{l} 9A = 2, \\ -12A + 9B = -1, \\ 2A - 6B + 9C = 3 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9}, B = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}.$$

Таким чином:

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27},$$

$$\text{а } y_{\text{з.н}} = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н}} = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Приклад 38. Розв'язати рівняння $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Розв'язання. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{\text{з.н}} = y_{\text{з.о}} + y_{\text{ч.н}}$.

Виконуючи всі дії, аналогічно попереднім, маємо:

$$2y'' - y' - y = 0, \quad 2k^2 - k - 1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_{3.0} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так як $\alpha = 2, \beta = 0$, то $\gamma = 2, \gamma \neq k_{1,2}$ тоді:

$$y_{ч.н} = (Ax + B)e^{2x},$$

$$y'_{ч.н} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$y''_{ч.н} = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Маємо:

$$2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на e^{2x} :

$$8Ax + 8A + 8B - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x,$$

$$5Ax + 7A + 5B = 4x.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^1 | 5A = 4, \\ x^0 | 7A + 5B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{4}{5}, B = -\frac{28}{25}.$$

$$y_{ч.н} = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}, \text{ а } y_{3.н} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

$$\text{Відповідь: } y_{3.н} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

Приклад 39. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = e^x(5 - x)$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{3.н} = y_{3.0} + y_{ч.н}, y'' - 2y' + y = 0, k^2 - 2k + 1 = 0, k_{1,2} = 1,$$

$$y_{3.0} = e^x(C_1 + C_2 x).$$

Враховуючи праву частину рівняння, маємо:

$$\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 1 = k_{1,2},$$

$$y_{ч.н} = e^x(Ax + B) \cdot x^2 = e^x(Ax^3 + Bx^2),$$

$$y'_{ч.н} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx),$$

$$y''_{\text{ч.н}} = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2B) =$$

$$= e^x(Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B).$$

Підставимо $y_{\text{ч.н}}$, $y'_{\text{ч.н}}$, $y''_{\text{ч.н}}$ в задане рівняння та скоротимо обидві частини на e^x :

$$6Ax + 2B = 5 - x,$$

$$\left. \begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6A = -1, \\ 2B = 5 \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = \frac{5}{2}.$$

$$y_{\text{ч.н}} = x^2 e^x \left(-\frac{x}{6} + \frac{5}{2} \right) = e^x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2 \right),$$

$$y_{\text{з.н}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2 \right).$$

$$\text{Відповідь: } y_{\text{з.н}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2 \right).$$

Приклад 40. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 5 \sin 4x - 3 \cos 4x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{з.н}} = y_{\text{з.о}} + y_{\text{ч.н}}.$$

Для того, щоб знайти $y_{\text{з.о}}$, запишемо однорідне диференціальне рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$, корені якого $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Таким чином, $y_{\text{з.о}} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

За правою частиною рівняння $\alpha = 0, \beta = 4$, тобто $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 4i$, $\gamma \neq k_{1,2}$, а отже, $y_{\text{ч.н}} = A \sin 4x + B \cos 4x$. Знайдемо

$$y'_{\text{ч.н}} = 4A \cos 4x - 4B \sin 4x \text{ та } y''_{\text{ч.н}} = -16A \sin 4x - 16B \cos 4x.$$

Підставимо їх значення в умову. Тоді маємо:

$$-16A \sin 4x - 16B \cos 4x + 8A \cos 4x - 8B \sin 4x + 10A \sin 4x + 10B \cos 4x = \\ = 5 \sin 4x - 3 \cos 4x .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ одержимо систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} \cos 4x \mid -6A - 8B = 5, \\ \sin 4x \mid 8A - 6B = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -0,54, B = -0,22 .$$

Отже, $y_{\text{ч.н}} = -0,54 \sin 4x - 0,22 \cos 4x$, а відповідно

$$y_{\text{ч.н}} = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54 \sin 4x - 0,22 \cos 4x .$$

Відповідь:

$$y_{\text{ч.н}} = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54 \sin 4x - 0,22 \cos 4x$$

Приклад 41. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = -\frac{17}{2} \cos 2x$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому випадку $y_{3.\text{н}} = y_{3.\text{о}} + y_{\text{ч.н}}$.

Знайдемо $y_{3.\text{о}}$:

$$y'' + 9y = 0, k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i \Rightarrow y_{3.\text{о}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x .$$

За правою частиною рівняння маємо $\alpha = 0, \beta = 2$, тоді $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 2i, \gamma \neq k_{1,2} \Rightarrow y_{\text{ч.н}} = A \cos 2x + B \sin 2x$ Знайдемо A та B .

Для цього запишемо:

$$y'_{\text{ч.н}} = -A \sin 2x + 2B \cos 2x \quad \text{та} \quad y''_{\text{ч.н}} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x .$$
 Підс-

таavimo одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 9A \cos 2x + 9B \sin 2x = -\frac{17}{2} \cos 2x ,$$

$$\text{тоді } 5A \cos 2x + 5B \sin 2x = -\frac{17}{2} \cos 2x ,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x \mid 5A = -\frac{17}{2}, \\ \sin 2x \mid 5B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = 0, A = -\frac{17}{10} = -1,7 .$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н}} = -1,7 \cos 2x$, а відповідно:

$$y_{3,н} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - 1,7 \cos 2x.$$

Відповідь: $y_{3,н} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - 1,7 \cos 2x.$

Приклад 42. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' - 5y = 2 \sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{3,н} = y_{3,о} + y_{ч,н}$. Знайдемо $y_{3,о}$:

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = -5.$$

$$y_{3,о} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Так як $\alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta i = 3i, \gamma \neq k_{1,2}$, то:

$$y_{ч,н} = A \cos 3x + B \sin 3x,$$

$$y'_{ч,н} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x,$$

$$y''_{ч,н} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Обчислимо A та B :

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 12A \sin 3x + 12B \cos 3x - 5A \cos 3x - 5B \sin 3x = 2 \sin 3x,$$

$$\begin{cases} \cos 3x \\ \sin 3x \end{cases} \begin{cases} -9A + 12B - 5A = 0, \\ -9B - 12A - 5B = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14A + 12B = 0, \\ -12A - 14B = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7A + 6B = 0, \\ -6A - 7B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{6}{85}, \quad B = -\frac{7}{85}.$$

Отже, $y_{ч,н} = -\frac{6}{85} \cos 3x - \frac{7}{85} \sin 3x$, а відповідно:

$$y_{3,н} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{85} \cos 3x - \frac{7}{85} \sin 3x.$$

Скористаємось початковою умовою $y(0) = 1$:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}.$$

Запишемо $y'_{3,н} = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x} + \frac{18}{85} \sin 3x - \frac{21}{85} \cos 3x$, та скорис-

таємось умовою $y'(0) = 0$:

$$0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}.$$

Об'єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}, \\ 0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}, \end{cases}$$

та знайдемо $C_1 = \frac{238}{255}$, $C_2 = \frac{7}{51}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y = \frac{238}{255} e^x + \frac{7}{51} e^{-5x} - \frac{6}{85} \cos 3x - \frac{7}{85} \sin 3x.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{238}{255} e^x + \frac{7}{51} e^{-5x} - \frac{6}{85} \cos 3x - \frac{7}{85} \sin 3x.$$

**1.5.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння
зі сталими коефіцієнтами та неспеціальною правою частиною.
Метод варіації довільних сталих**

Посилаючись на теоретичний матеріал, можна стверджувати, що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$, являє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язка неоднорідного диференціального рівняння, тобто $y_{3,н} = y_{3,о} + y_{ч,н}$.

Розглянемо метод Лагранжа (так званий метод варіації довільних сталих), який дозволяє за відомим загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Детально розглянемо цей метод для диференціального рівняння другого порядку, а саме – рівняння виду:

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f(x), \quad (1)$$

де $f(x)$ – довільна функція.

Припустимо, що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0. \quad (2)$$

Частинні розв'язки цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{чн.}} = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x), \quad (3)$$

де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ – невідомі функції, що потрібно визначити.

Оскільки визначенню підлягають дві функції, то одним із співвідношень між ними можна розпорядитися довільно.

Продиференціюємо (3):

$$y'_{\text{чн.}}(x) = C'_1(x) \cdot y_1(x) + C_1(x) \cdot y'_1(x) + C'_2(x) \cdot y_2(x) + C_2(x) \cdot y'_2(x).$$

Очевидно, що найбільш доцільно накласти на $C_1(x)$ та $C_2(x)$ такі умови, щоб вираз для $y'_{\text{чн.}}$ мав точно такий же вигляд, що і при сталих C_1 та C_2 .

Для цього припустимо, що

$$C'_1(x) \cdot y_1(x) + C'_2(x) \cdot y_2(x) = 0. \quad (4)$$

Тоді

$$y'_{\text{чн.}} = C_1(x) \cdot y'_1(x) + C_2(x) \cdot y'_2(x),$$

а, отже,

$$y''_{\text{чн.}} = C'_1(x) \cdot y'_1(x) + C_1(x) \cdot y''_1(x) + C'_2(x) \cdot y'_2(x) + C_2(x) \cdot y''_2(x).$$

Підставимо значення $y_{\text{ч.н}}$, $y'_{\text{ч.н}}$ та $y''_{\text{ч.н}}$ в (1):

$$C'_1(x) \cdot y' + C_1(x) \cdot y'' + C'_2(x) \cdot y'_2 + C_2(x) \cdot y''_2 + a_1 \cdot C_1(x) \cdot y'_1 + a_1 \cdot C_2(x) \cdot y'_2 + a_2 \cdot C_1(x) \cdot y_1 + a_2 \cdot C_2(x) \cdot y_2 = f(x)$$

та виконаємо перетворення

$$C'_1(x) \cdot y'_1 + C'_2(x) \cdot y'_2 + C_1 \left(\underbrace{y''_1 + a_1 \cdot y'_1 + a_2 \cdot y_1}_{=0} \right) +$$

$$+ C_2 \left(\underbrace{y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_2 \cdot y_2}_{=0} \right) = f(x),$$

оскільки y_1 та y_2 – розв’язки рівняння (2).

Таким чином, для того, щоб функція

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

була розв’язком рівняння (1), крім умови (4) повинна ще виконуватись умова

$$C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x).$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{cases}$$

Головний визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

а, отже, система сумісна.

Спочатку визначимо $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$, а потім за допомогою інтегрування і самі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

Якщо при інтегруванні ввести довільні сталі, то ми відразу отримаємо загальний розв’язок неоднорідного рівняння.

Приклад 43. Розв’язати диференціальне рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Розв’язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тоді лінійно незалежні розв’язки будуть $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$. Відповідно, загальний розв’язок однорідного рівняння: $y_{3,0} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, тобто:

$$y_{3,0} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді $y_{ч.н} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ – функції, що підлягають визначенню. Ці функції визначаємо з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Запишемо систему для нашого диференціального рівняння:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

За правилом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \sin x.$$

Звідки:

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Тоді маємо:

$$y_{ч.н} = \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x = -\cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Згідно з вищевикладеним, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{3.н} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$\text{Відповідь: } y_{3.н} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Приклад 44. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, його характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має кратні корені $k_{1,2} = 1$, а його лінійно незалежні розв'язки будуть $y_1 = e^x$ та $y_2 = xe^x$.

Згідно з теоремою про загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння маємо $y_{3.о} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$, де $C_1(x)$ та $C_2(x)$ ті функції, які необхідно визначити. Їх знаходимо з відомої вже системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}. \end{cases}$$

За правилом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = -\frac{xe^{2x}}{e^{2x}(x^2 + 1)} = -\frac{x}{x^2 + 1},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Звідки:

$$C_1(x) = \int -\frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1|,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x, \text{ а}$$

$$y_{\text{ч.н}} = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| \cdot e^x + x e^x \operatorname{arctg} x.$$

Таким чином:

$$y_{\text{з.н}} = y_{\text{з.о}} + y_{\text{ч.н}} = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{e^x}{2} \ln|x^2+1| + x e^x \operatorname{arctg} x.$$

Відповідь: $y_{\text{з.н}} = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{e^x}{2} \ln|x^2+1| + x e^x \operatorname{arctg} x.$



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ



1. Який вигляд має ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною?
2. Як читається теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною?
3. В чому полягає метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)? Коли доцільно ним скористатись?
4. Який вигляд має система рівнянь для визначення невідомих функцій $C'_1(x)$ та $C'_2(x)$?



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ



З'ясувати тип диференціального рівняння та знайти його відповідно загальний чи частинний розв'язок.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $y'' - 2y' = 2;$ | 4. $y'' + 9y = 12 \sin 3x;$ |
| 2. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1;$ | 5. $y'' + y = \cos x;$ |
| 3. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x};$ | |

$$6. \quad y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1};$$

$$7. \quad y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x},$$

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

Відповіді:

$$1. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} - x;$$

$$2. \quad y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 -$$

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x;$$

$$3. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x};$$

$$4. \quad y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x -$$

$$-2x \cos 3x;$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 2x +$$

$$5. \quad +\frac{1}{2}x \sin x;$$

$$6. \quad y = e^x - (e^x + 1) \cdot \ln(e^x + 1);$$

$$7. \quad y = \frac{4 \cos^2 x + \sin 2x + 2 \sin^2 x}{2 \cos x}.$$

Розв'язком системи диференціальних рівнянь називають сукупність n функцій y_1, y_2, \dots, y_n , що задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

Початкові умови для системи мають вигляд:

$$y_1(x_0) = y_1^0; y_2(x_0) = y_2^0; \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Одним з основних методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є метод зведення системи до одного диференціального рівняння вищого порядку, яке містить тільки одну невідому функцію.

Після знаходження цієї функції другу функцію знаходимо із заданих рівнянь та тих рівнянь, що отримані в результаті їх диференціювання.

Приклад 45. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок даної системи рівнянь будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Для цього оберемо перше рівняння системи та запишемо його у вигляді $\dot{x} = 5x + 8y$. Обидві частини рівняння продиференціюємо, тоді $\ddot{x} = 5\dot{x} + 8\dot{y}$. Підставимо в це рівняння значення \dot{y} , взяті з другого рівняння системи: $\dot{y} = 3x + 3y$, тоді $\ddot{x} = 5\dot{x} + 8(3x + 3y) \Rightarrow \ddot{x} = 5\dot{x} + 24x + 24y$.

Далі замість y підставимо його вираз, взятий з першого рівняння системи $\left(y = \frac{\dot{x} - 5x}{8} \right)$, $\ddot{x} = 5\dot{x} + 24x + 3\dot{x} - 15x \Rightarrow \ddot{x} - 8\dot{x} - 9x = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння та знайдемо його корені:

$$k^2 - 8k - 9 = 0, \text{ звідки } k_1 = -1, k_2 = 9.$$

Таким чином можна записати, що: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}$. Врахову-

ючи те, що $y(t) = \frac{1}{8}(\dot{x} - 5x)$, маємо:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8}(-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 5C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{9t}) = \\ &= \frac{1}{8}(-6C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{9t}) = \frac{1}{4}(-3C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}). \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи рівнянь буде:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y(t) = \frac{1}{4}(-3C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}). \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y(t) = \frac{1}{4}(-3C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}). \end{cases}$$

Приклад 46. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даної системи рівнянь будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Запишемо систему таким чином:

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Оберемо перше рівняння системи $\dot{x} = -7x + y$. Обидві частини рівняння продиференціюємо, тоді $\ddot{x} = -7\dot{x} + \dot{y}$. Підставимо в це рівняння значення \dot{y} , взяте з другого рівняння системи:

$$\dot{y} = -2x - 5y, \text{ тоді } \ddot{x} = -7\dot{x} - 2x - 5y.$$

Далі замість y підставимо його вираз, взятий з першого рівняння системи ($y = \dot{x} + 7x$), $\ddot{x} = -7\dot{x} - 2x - 5(\dot{x} + 7x) \Rightarrow \ddot{x} + 12\dot{x} + 37x = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння та знайдемо його корені:

$$k^2 + 12k + 37 = 0, \text{ звідки } k_{1,2} = -6 \pm i.$$

Таким чином можна записати, що:

$$x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Враховуючи те, що $y(t) = \dot{x} + 7x$, маємо:

$$y(t) = -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t).$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи рівнянь буде:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{-6t} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{-6t} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$

Розрахункове завдання 1

Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь і системи:

Варіант 1

- $(5x + xy)dy + e^y(1 - 2x)dx = 0$;
- $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$;
- $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x, y(0) = 0$;
- $xy' + y = y^2 \ln x$;
- $y'' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$;
- $xy'' + y' + x = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0$;
- $y''y^3 = 1$;
- $y'' - 14y' + 45y = 0$;
- $25y'' - 40y' + 16y = 0$;
- $y'' + 2y' + 2y = 0$;
- $y''' - 9y' = 0$;
- $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^4}$;
- $y'' + 6y' + 13y = \cos 3x$;
- $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;
- $y(\ln 2) = 1, y'(\ln 2) = 3$;
- $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

Варіант 2

- $\frac{yy'}{x} = \frac{\cos x^2}{\cos y}$;
- $y' = \frac{3y - x}{x + y}$;
- $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;
- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$;
- $y'' = e^{3x} - x + 1$;
- $(1 + x^2)y'' = 1 + y'^2, y(0) = y'(0) = 1$;
- $2yy'' = 1 + y'^2$;
- $y'' - 11y' + 18y = 0$;
- $9y'' - 24y' + 16y = 0$;
- $y'' - 8y' + 25y = 0$;
- $y''' - 4y'' + y' - 4y = 0$;
- $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$;
- $y'' - 3y' + 2y = 1 - 2x$;
- $y'' + y = 3 \sin x, y(0) + y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- $\begin{cases} \dot{x} = y - 7x, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

Варіант 3

1. $y(1-x^2)dy - x(1-y^2)dx = 0$;
2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
3. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$;
4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;
5. $y'' = \frac{1}{(x+3)^2}$;
6. $(x+1)y'' + xy'^2 = y'$,
 $y(1) = -2, y'(1) = 4$;
7. $yy'' = y'^2$;
8. $y'' - 12y' + 27y = 0$;
9. $y'' + 18y' + 81y = 0$;
10. $y'' + 4y' + 5y = 0$;
11. $y^{IV} - 16y = 0$;
12. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$;
13. $y'' + 2y' = 4e^x$;
14. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 2$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y' = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$;
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
3. $\frac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x + 2x \sin x$;
4. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$;
5. $y'' = 5^{2x}$;
6. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0, y'(2) = 4$;
7. $y'' + \frac{2}{1-y} \cdot y'^2 = 0$;
8. $y'' - 3y' + 2y = 0$;
9. $y'' - 2y' + 2y = 0$;
10. $y'' - 2y' + y = 0$;
11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
12. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$;
13. $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$;
14. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 3, 2$;
15. $\begin{cases} \dot{y} = -3y - x, \\ \dot{x} = y - x. \end{cases}$

Варіант 5

1. $x dx + y dy = 0$;
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{x}{y}\right)$,
 $y(1) = \frac{\pi}{2}$;
3. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;
4. $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$;
5. $y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;
6. $xy'' + xy'^2 - y' = 0$,
 $y(2) = 2, y'(2) = 1$;
7. $1 + y'^2 = yy''$;
8. $y'' - 9y' + 20y = 0$;
9. $y'' - 4y' + 4y = 0$;
10. $y'' + 6y' + 18y = 0$;
11. $y''' + 2y'' + 3y' + 6y = 0$;
12. $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$;
13. $y'' - 2y' + 2y = x^2$;
14. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{\frac{-3}{2}x}$,
 $y(0) = 3, y'(0) = -5,5$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

Варіант 6

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;
2. $(x + y)dx - xdy = 0$;
3. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$;
4. $xy' + y = y^2 \ln x$;
5. $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$;
6. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 3$;
7. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$;
8. $y'' - 12y' + 35y = 0$;
9. $y'' - 8y' + 16y = 0$;
10. $y'' + 10y' + 29y = 0$;
11. $y''' + 3y'' + 12y' + 10y = 0$;
12. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$;
13. $y'' - 5y' = \sin 5x$;
14. $y'' - y = e^x$, $y(0) = y'(0) = \frac{1}{2}$;
15. $\begin{cases} \dot{y} = y + x \\ \dot{x} = -10y - x \end{cases}$.

Варіант 7

1. $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$;
2. $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(ydx + xdy) -$
 $-y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 0$;
3. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$, $y(0) = 3$;
4. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
5. $y'' = \frac{\ln x}{x}$;
6. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$,
 $y(2) = 1, y'(2) = -1$;
7. $yy'' - y'^2 = y^2 y'$;
8. $y'' - 5y' + 4y = 0$;
9. $9y'' - 6y' + y = 0$;
10. $y'' - 12y' + 37y = 0$;
11. $y^{IV} - 81y = 0$;
12. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$;
13. $y'' - y = 2e^{3x}$;
14. $y'' - 2y' + y = x^2 + x - 3$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

Варіант 8

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$;
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$, $y(1) = -1$;
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;
5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3$;
6. $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$,
 $y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1$;
7. $yy'' = y'(y' + 1)$;
8. $y'' - 7y' + 10y = 0$;
9. $y'' + 8y' + 16y = 0$;
10. $y'' + 8y' + 20y = 0$;
11. $y''' + 7y' = 0$;
12. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$;
13. $y'' + 2y' - 3y = x^2$;
14. $y'' + 9y = 6e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Варіант 9

1. $x(1+y^2)dx = ydy$;
2. $y' = \frac{3y-x}{x+y}$;
3. $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$;
4. $\frac{y'}{y^3} + 2\frac{x}{y^2} = 2x^3$;
5. $y'' = \frac{5}{\sin^2 x} + 1$;
6. $y''(1+\ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x$,
 $y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1$;
7. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$,
 $y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2$;
8. $y'' - 9y' + 18y = 0$;
9. $y'' - 10y' + 25y = 0$;
10. $y'' - 2y' + 5y = 0$;
11. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$;
12. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$;
13. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;
14. $y'' + 8y' + 16y = \frac{289}{-5} \cdot \cos x$,
 $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{48}{5}$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Варіант 10

1. $s \cdot \operatorname{tg} t dt + ds = 0, s\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$;
2. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx, y(1) = 3$;
3. $y' + 2y = e^{3x}$;
4. $(1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$;
5. $y''' = e^{-x} + x$;
6. $xy'' - y' = x^2 e^x$;
7. $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$;
8. $y'' - 11y' + 28y = 0$;
9. $25y'' + 10y' + y = 0$;
10. $y'' + 6y' + 13y = 0$;
11. $y''' + 3y'' - 9y' + 5y = 0$;
12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$;
13. $y'' - 2y' + y = 6x$;
14. $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 2$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 4x + 5y. \end{cases}$

Вариант 11

1. $(1+y)dx = (1-x)dy$, $y(-2) = 3$;
2. $(x^2 + y^2)dx = xydy$;
3. $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1$;
4. $y'(x^2 y^3 + xy) = 1$;
5. $y''' = \cos 2x$;
6. $xy'' + y' = 0$;
7. $yy'' = y'^2 - y'^3$,
 $y(1) = 1, y'(1) = 1$;
8. $y'' - 13y' + 40y = 0$;
9. $y'' + 10y' + 25y = 0$;
10. $y'' - 4y' + 8y = 0$;
11. $y^{IV} - y = 0$;
12. $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$;
13. $y'' + 6y' + 10y = 5e^{-3x}$;
14. $y'' + 6y' + 9y = 3x + 11$,
 $y(0) = -1, y'(0) = \frac{7}{3}$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Вариант 12

1. $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$;
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;
3. $(x^2 - 1)y' - xy - ax = 0$;
4. $xy' + y = y^2 \cdot \ln x$;
5. $y'' = \cos x \sin 7x$;
6. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;
7. $2(y')^2 = y''(y-1)$,
 $y(1) = 2, y'(1) = 1$;
8. $y'' - 4y' + 3y = 0$;
9. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
10. $y'' + 4y' + 13y = 0$;
11. $y''' + y'' + 8y' - 10y = 0$;
12. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$;
13. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$;
14. $y'' + 2y' + y = 8e^{-3x}$,
 $y(0) = -1, y'(0) = 1$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 8y, \\ \dot{y} = 3x + 3y. \end{cases}$

Вариант 13

1. $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$;
2. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;
3. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$;
4. $y'(x^2 y^3 + xy) = 1$;
5. $y'' = \frac{4}{x^2}$;

6. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$;
7. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$,
8. $y'' - 8y' + 15y = 0$;
9. $16y'' - 8y' + y = 0$;
10. $y'' + 2y' + 10y = 0$;
11. $y''' + y'' - 8y' - 12 = 0$;

12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$;
13. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x - 5$;
14. $y'' + 4y = 5e^{2x}$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 9y, \\ \dot{y} = x + 8y. \end{cases}$

Вариант 14

1. $y^2 dx = e^x dy, y(0) = 1$;
2. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$;
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$;
4. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2y dy}{x^3}$;
5. $y'' = e^{-x} + \ln x$;
6. $y'' y' = -x$;
7. $1 + y'^2 = yy''$;
8. $y'' - 10y' + 24y = 0$;
9. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
10. $y'' - 10y' + 26y = 0$;
11. $y''' - y'' + 5y' - 5y = 0$;
12. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$;
13. $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 + 5$;
14. $y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = y'(\pi) = 1$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Вариант 15

1. $\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} = \operatorname{ctg} x \sin y dy$,
2. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0$;
3. $y' + y = \cos x$;
4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, y(-1) = 1$;
5. $y'' = \ln x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$;
7. $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$;
8. $y'' - 6y' + 5y = 0$;
9. $y'' - 12y' + 36y = 0$;

$$10. y'' + 2y' + 5y = 0;$$

$$11. y^{IV} - 625y = 0;$$

$$12. y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 2;$$

$$13. y'' + 2y' = e^{3x};$$

$$14. y'' + 6y' + 13y = 26x - 1,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 16

$$1. \frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x;$$

$$2. y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x};$$

$$3. e^{x^2} y' + 2xye^{x^2} = x \sin x;$$

$$4. y' - xy = -y^3 e^{-x^2};$$

$$5. y'' = \sin^3 x;$$

$$6. 2xy'y'' = (y')^2 - 1;$$

$$7. y'' = 18 \sin^3 y \cos y, \\ y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 3;$$

$$8. y'' - 8y' + 12y = 0;$$

$$9. 4y'' - 20y' + 25y = 0;$$

$$10. y'' - 6y' + 13y = 0;$$

$$11. y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0;$$

$$12. y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x};$$

$$13. y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x;$$

$$14. y'' + y = 3e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$$

Варіант 17

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 1};$$

$$2. (y^4 - 2x^3 y) dx + (x^4 - 2xy^3) dy = 0;$$

$$3. y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x};$$

$$4. 3y^2 y' + y^3 = x + 1;$$

$$5. y'' = \sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$6. y'' y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2;$$

$$7. xy'' = y' + x \cdot \sin \frac{y'}{x};$$

$$8. y'' - 7y' + 6y = 0;$$

$$9. 9y'' - 12y' + 4y = 0;$$

$$10. y'' + 12y' + 37y = 0;$$

$$11. y''' + y'' + 8y' + 8y = 0;$$

$$12. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$13. y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x;$$

$$14. 2y'' - y' = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 1; \quad 15. \begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 18

$$1. xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0;$$

$$2. (1+e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0;$$

$$3. y' - \frac{1}{\sin x \cos x}y = -\frac{1}{\sin x} - \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2;$$

$$5. y''(e^x + 1) + y' = 0;$$

$$6. y'' = \cos^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x};$$

$$7. y'' = 128y^3, y(0) = 1, y(0) = -8;$$

$$8. y'' - 11y' + 24y = 0;$$

$$9. 25y'' - 20y' + 4y = 0;$$

$$10. y'' - 2y' + 10y = 0;$$

$$11. y^{IV} + y'' = 0;$$

$$12. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x;$$

$$13. y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x;$$

$$14. y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 19

$$1. ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0;$$

$$2. \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy};$$

$$3. \frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n, y(0) = 1;$$

$$4. yy' + \frac{1}{2}y^2 = \sin x;$$

$$5. y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$6. x^2 y'' = (y')^2;$$

$$7. 2(y')^2 = y''(y-1), \quad y(1) = 2, y'(1) = -1;$$

$$8. y'' - 9y' + 8y = 0;$$

$$9. y'' + 16y' + 64y = 0;$$

$$10. y'' + 8y' + 17y = 0;$$

$$11. y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0;$$

$$12. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$13. y'' + 3y' - 4y = e^{-4x};$$

$$14. y'' - 2y' = 2e^x,$$

$$y(1) = -1, y'(1) = 0;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Варіант 20

$$1. (1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) - (1+y^2)dy = 0;$$

$$2. xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx, y(1) = 3;$$

$$3. \frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}, y(0) = 3;$$

$$4. (1-x^2)y' - xy = xy^2;$$

$$5. y'' = \frac{1}{x^2} + 12x^2;$$

$$6. (1+x^2)y'' = 1 + (y')^2;$$

$$7. y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1;$$

$$8. y'' - 13y' + 36y = 0;$$

$$9. 16y'' - 24y' + 9y = 0;$$

$$10. y'' - 4y' + 13y = 0;$$

$$11. y^{IV} + 13y'' + 36y = 0;$$

$$12. y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1};$$

$$13. y'' - 2y' - 3y = e^{4x};$$

$$14. y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$15. \begin{cases} \dot{y} = -x, \\ \dot{x} = -4y. \end{cases}$$

Варіант 21

$$1. y' \operatorname{tg} x = y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$2. (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, \\ y(1) = 0;$$

$$3. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1;$$

$$4. ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0;$$

$$5. y'' = \frac{1}{x};$$

$$6. y'' = -\frac{x}{y};$$

$$7. 3y'y'' = y + (y')^3 + 1, \\ y(0) = -2, y'(0) = 0;$$

$$8. y'' - 8y' + 7y = 0;$$

$$9. y'' - 16y' + 64y = 0;$$

$$10. y'' + 10y' + 26y = 0;$$

$$11. y''' - y'' + 5y' - 5y = 0;$$

$$12. y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{2e^x + 1};$$

$$13. y'' + 4y' + 4y = e^{2x};$$

$$14. y'' + y' - 2y = 3x + 5;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = -20x - y. \end{cases}$$

Вариант 22

$$1. (y+1)dy + \frac{dy}{y-1} = xdx - dx + \frac{dx}{x+1};$$

$$2. xy' = y \ln \frac{y}{x}, y(1) = 1;$$

$$3. y' = 2y + e^x - x, y(0) = \frac{1}{4};$$

$$4. (1-x^2)y' - xy = xy^2;$$

$$5. y''' \sin^4 x = \sin 2x;$$

$$6. xy'' + y' = 0;$$

$$7. y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 2;$$

$$8. y'' - 8y' + 15y = 0;$$

$$9. 16y'' - 8y' + y = 0;$$

$$10. y'' + 2y' + 17y = 0;$$

$$11. 3y^{IV} - 7y'' = 0;$$

$$12. y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x};$$

$$13. y'' + y' - 6y = e^{-2x};$$

$$14. y'' - 5y' + 6y = 1 - x, \\ y(0) = y'(0) = 0;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Вариант 23

$$1. y' = e^{x+y};$$

$$2. y' = \frac{3y-x}{x+y};$$

$$3. y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2;$$

$$4. y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y};$$

$$5. y'' = 2 \sin x \cos^2 x;$$

$$6. (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0;$$

$$7. yy'' + y'^2 = 1, y(0) = y'(0) = 1;$$

$$8. 3y'' + y' - 2y = 0;$$

$$9. 25y'' + 10y' + y = 0;$$

$$10. 4y'' + y = 0;$$

$$11. y''' + 5y'' + 4y' + 20y = 0;$$

$$12. y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}};$$

$$13. y'' - 8y' + 7y = 14;$$

$$14. y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \\ y(0) = 3, y'(0) = 9;$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Вариант 24

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y')$;
2. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$;
3. $y' + 2y = e^{3x}$;
4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$;
5. $y''' = \cos^2 x$;
6. $x^2 y'' + xy' = 1$;
7. $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y(0) = y'(0) = 1$;
8. $5y'' + 4y = 0$;
9. $9y'' + 12y' + 4y = 0$;
10. $y'' + 2y' + 9y = 0$;
11. $y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$;
12. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \cdot \sqrt{x+1}$;
13. $y'' - 4y' + 4y = x^2$;
14. $y'' + y' - 2y = 5 \sin 2x$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Вариант 25

1. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$;
2. $(x - y)dx + xdy = 0$;
3. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;
4. $y' = y \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$;
5. $y'' = xe^{-x}$;
6. $y'' = \cos^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$;
7. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1, y'(0) = 8$;
8. $10y'' + 3y' - 4y = 0$;
9. $9y'' + 24y' + 16y = 0$;
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$;
11. $9y^{IV} + 4y'' = 0$;
12. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$;
13. $y'' - y' + y = x^3 + 6$;
14. $y'' - y' = e^{3x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;
15. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

Відповіді:**Варіант 1**

1. $\ln \frac{1}{|x|} + 2x + C = -5e^{-y} - ye^{-y} - e^{-y}$;
2. $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4}\right) = Cx$;
3. $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$;
4. $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$;
5. $y = -2 \operatorname{arctg} x + C_1 x + C_2$;
6. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4}$;
7. $y = \sqrt{C_1(x + C_2)^2 + \frac{1}{C_1}}$;
8. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{9x}$;
9. $y = e^{4/5x} (C_1 + C_2 x)$;
10. $y = e^{-x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$;
11. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$;
12. $y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6x^2} \right)$;
13. $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{85} \cos 3x + \frac{9}{170} \sin 3x$;
14. $y = \frac{1}{5} e^{4x} + \frac{8}{5} e^{-x} - \frac{3}{8} e^{3x}$;
15. $\begin{cases} x(t) = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y(t) = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

Варіант 2

1. $y \sin y + \cos y + C = \frac{1}{2} \sin x^2$;
2. $e^{\frac{2x}{y-x}} = \frac{y-x}{C}$;
3. $x = \frac{1}{2} y^2 + C y^3$;
4. $y^2 = \frac{x^3}{2} + Cx$;
5. $y = \frac{1}{9} e^{3x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$;
6. $y = -x - 2 \ln|x-1| + 1$;
7. $y = \frac{C_1}{4} (C_2 \pm x)^2 + \frac{1}{C_1}$;
8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{9x}$;
9. $y = e^{4/3x} (C_1 + C_2 x)$;
10. $y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
11. $y = C_1 e^{4x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$;
12. $y = (C_1 - \pi x) \cos \pi x + (\ln|\sin \pi x| + C_2) \sin \pi x$;
13. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x - 1$;

$$14. y = \frac{3(2 + \pi)}{8} \cos x + \frac{3(2 - \pi)}{8} \sin x - \frac{3}{2} x \cos x;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{-6t} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$

Варіант 3

$$1. 1 - y^2 = C(1 - x^2);$$

$$2. \arcsin \frac{y}{x} = \ln |Cx|;$$

$$3. y = \frac{x^3}{2} + Cx;$$

$$4. y = e^{-2x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^2;$$

$$5. y = -\ln |x + 3| + C_1 x + C_2;$$

$$6. y = 2 \ln |x| - \frac{2}{x};$$

$$7. y = e^{C_1 x + C_2};$$

$$8. y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{9x};$$

$$9. y = e^{-9x} (C_1 + C_2 x);$$

$$10. y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$11. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x;$$

$$12. y = (\ln |\cos \pi x| + C_1) \cos \pi x + (\pi x + C_2) \sin \pi x;$$

$$13. y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{4}{3} e^x;$$

$$14. y = e^x + \sin x;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Варіант 4

$$1. y = 2 \operatorname{arctg}(C e^{-\cos x});$$

$$2. \sin \frac{y}{x} = Cx;$$

$$3. y = x^2 \sin x + C \sin x;$$

$$4. y = \frac{1}{C \sqrt{1 - x^2} - 1};$$

$$5. y = \frac{1}{4 \ln^2 5} 5^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$6. y = \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5};$$

$$7. y = \frac{x + C_1}{x + C_2};$$

$$8. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x};$$

$$9. y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$10. y = e^x (C_1 + C_2 x);$$

$$11. y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2);$$

$$12. y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - x \right) \sin 2x;$$

$$13. y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{5}{102} \sin x + \frac{7}{51} \cos x;$$

$$14. y = e^x(0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = e^{-2t}(-C_1 - C_2 - C_2 t), \\ y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}. \end{cases}$$

Варіант 5

$$1. x^2 + y^2 = 2C;$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{y}{2x} = x;$$

$$3. y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2;$$

$$4. y = \frac{\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|}{\sin x + C};$$

$$5. y = C_1 x + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C_2;$$

$$6. y = 2 + \ln \frac{x^2}{4};$$

$$7. \ln |C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}| = \pm C_1 (x + C_2);$$

$$8. y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x};$$

$$9. y = e^{2x}(C_1 + C_2 x);$$

$$10. y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$$

$$11. y = C_1 e^{-2x} + C_2 \sin \sqrt{3}x + C_3 \cos \sqrt{3}x;$$

$$12. y = \left(C_1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \cos x + (2 \operatorname{tg} x + C_2) \sin x;$$

$$13. y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2;$$

$$14. y = 2e^{\frac{-5}{2}x} + e^{\frac{-3}{2}x}(x+1);$$

$$15. \begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = \frac{1}{5} e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t + (-C_1 - 2C_2) \sin t). \end{cases}$$

Варіант 6

$$1. 1 + y^2 = C(1 - x^2);$$

$$2. C|x| = e^y;$$

$$3. y = (\operatorname{tg} x + 1) \cos x;$$

$$4. y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx};$$

$$5. y = x(C_1 + \operatorname{arctg} x) + C_2 - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2|;$$

6. $y = x^3 + 3x + 1$;
7. $\ln|C_1(y+1)-1| = C_1(x+C_2)$;
8. $y = C_1e^{5x} + C_2e^{7x}$;
9. $y = e^{4x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{-5x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
11. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$;
12. $y = (C_1 - 4x) \cos 4x + (C_2 + \ln|\sin 4x|) \sin 4x$;
13. $y = C_1 + C_2e^{5x} + \frac{1}{50} \cos 5x - \frac{1}{50} \sin 5x$;
14. $y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{x}{2}e^x$;
15. $\begin{cases} x(t) = (3C_2 - C_1) \cos 3t + \\ + (-3C_1 - C_2) \sin 3t, \\ y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t. \end{cases}$

Варіант 7

1. $1 + y^2 = C(1 + x^2)$;
2. $xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) = C$;
3. $y = 2x + 3\sqrt{1+x^2}$;
4. $y = \pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$;
5. $y = C_1x + \frac{x}{2}\ln^2 x - x \ln x + x + C_2$;
6. $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$;
7. $\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| = (x+C_2)C_1$;
8. $y = C_1e^x + C_2e^{4x}$;
9. $y = e^{\frac{1}{3}x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
11. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3 \sin 3x + C_4 \cos 3x$;
12. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$;
13. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}$;
14. $y = e^x(C_1 + C_2x) + x^2 + 5x + 5$;
15. $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}, \\ y(t) = e^{-2t}(-C_1 - C_2) - C_2te^{-2t}. \end{cases}$

Варіант 8

1. $y = Cx$;
2. $x = e^{\frac{x+y}{y}}$;
3. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$;

$$4. y = e^{-2x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^2;$$

$$5. y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2;$$

$$6. y = \frac{x^2}{2};$$

$$7. y = \frac{e^{C_1(x+C_2)} + 1}{C_1};$$

$$8. y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x};$$

$$9. y = e^{-4x} (C_1 + C_2x);$$

$$10. y = e^{-4x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

$$11. y = C_1 + C_2 \sin \sqrt{7}x + C_3 \cos \sqrt{7}x;$$

$$12. y = e^{2x} \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x} \right);$$

$$13. y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{17}{8};$$

$$14. y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x});$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}, \\ y(t) = C_1e^{3t} - 4C_2e^{-2t}. \end{cases}$$

Вариант 9

$$1. 1 + y^2 = e^{x^2+C};$$

$$2. \ln y + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2;$$

$$3. y = (x + C)(1 + x^2);$$

$$4. y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1;$$

$$5. y = -5 \ln |\sin x| + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2;$$

$$6. y = \frac{x^2}{2};$$

$$7. \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| = 2x + 2;$$

$$8. y = C_1e^{6x} + C_2e^{3x};$$

$$9. y = e^{5x} (C_1 + C_2x);$$

$$10. y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

$$11. y = e^{-2x} (C_1 + C_2x + C_3x^2);$$

$$12. y = e^{2x} (C_2 - \ln x + C_1x);$$

$$13. y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{3} \right) e^x;$$

$$14. y = 3e^{-4x} + 4xe^{-4x} - 3 \cos x - \frac{8}{5} \sin x;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}, \\ y(t) = \left(\frac{C_2}{3} - C_1 \right) e^{2t} - C_2te^{2t}. \end{cases}$$

Вариант 10

1. $s = 8 \cos t$;
2. $y^3 = 3x^3(\ln x + 9)$;
3. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$;
4. $(C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1$;
5. $y = -e^{-x} + \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$;
6. $y = \frac{C_1x^2}{2} + e^x(x-1) + C_2$;
7. $y = \frac{4}{(x+4)^2}$;
8. $y = C_1e^{7x} + C_2e^{4x}$;
9. $y = e^{-\frac{1}{5}x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
11. $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{-5x}$;
12. $y = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x$;
13. $y = e^x(C_1 + C_2x) + 6x + 12$;
14. $y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} + e^{3x}$;
15.
$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}, \\ y(t) = (-2C_1 - C_2)e^{3t} - 2C_2te^{3t}. \end{cases}$$

Вариант 11

1. $1 + y = \frac{12}{1-x}$;
2. $Cx = e^{\frac{y^2}{2x^2}}$;
3. $y = x \ln x + \frac{C}{x}$;
4. $x \left((2 - y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + C \right) = e^{\frac{y^2}{2}}$;
5. $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$;
6. $y = \ln|x^{C_1} \cdot C_2|$;
7. $y - x = 2 \ln y$;
8. $y = C_1e^{8x} + C_2e^{5x}$;
9. $y = e^{-5x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
11. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$;
12. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - 2$;
13. $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 5e^{-3x}$;
14. $y = -2e^{-3x} - \frac{4}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}x + 1$;
15.
$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = -\frac{e^{-t}((C_1 + C_2) \cos t)}{2} - \frac{e^{-t}((C_2 - C_1) \sin t)}{2}. \end{cases}$$

Вариант 12

1. $\frac{Cx}{y} = e^{\frac{x+y}{xy}};$
2. $\operatorname{tg} \frac{y}{2x} = x;$
3. $1 = y(C\sqrt{x^2 - 1} - a);$
4. $y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1};$
5. $y = -\frac{1}{128} \sin 8x - \frac{1}{72} \sin 6x + C_1 x + C_2;$
6. $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2;$
7. $y = \frac{x+1}{x};$
8. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x};$
9. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x);$
10. $y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$
 $y = C_1 e^x + e^{-x} C_2 \cos 3x +$
11. $+e^{-x} C_3 \sin 3x;$
12. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 +$
 $+\sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|;$
13. $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x + e^x (C_1 \cos x +$
 $+C_2 \sin x);$
14. $y = -3e^{-x} + 4xe^{-x} + 2e^{-3x};$
15. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y(t) = \frac{-3C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}}{4}. \end{cases}$

Вариант 13

1. $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y = C;$
2. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln |y| = C;$
3. $y = \frac{x^3}{2} + Cx;$
4. $x \left((2 - y^2) e^{\frac{y^2}{2}} + C \right) = e^{\frac{y^2}{2}};$
5. $y = -4 \ln |x| + C_1 x + C_2;$
6. $y = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{(x+C_1)^5}}{5} -$
 $-2\sqrt{2} \frac{C_1 \sqrt{(x+C_1)^3}}{3} + C_2;$
7. $y = -\ln |1-x|;$
8. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x};$
9. $y = e^{\frac{1}{4}x} (C_1 + C_2 x);$
10. $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$
11. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x};$

$$12. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|;$$

$$13. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2 + 2x + \frac{1}{2};$$

$$14. y = \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{5}{8} \sin 2x + \frac{5}{8} e^{2x};$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}, \\ y(t) = \frac{-3C_1 e^{5t} - 3C_2 t e^{5t} - C_2 e^{5t}}{9}. \end{cases}$$

Вариант 14

$$1. y = e^x;$$

$$2. \sin \frac{y}{x} + \ln x = C;$$

$$3. y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2;$$

$$4. x^2 + y^2 = Cx^3;$$

$$5. y = e^{-x} + C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2} \left(\ln|x| - \frac{3}{4} \right);$$

$$6. y = \frac{x}{2} \sqrt{C_1 - x^2} + \frac{C_1}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2;$$

$$7. \ln |C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}| = \pm C_1 (x + C_2);$$

$$8. y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{6x};$$

$$9. y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x);$$

$$10. y = e^{5x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$11. y = C_1 e^x + C_2 \sin \sqrt{5}x + C_3 \cos \sqrt{5}x;$$

$$12. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|;$$

$$13. y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x^2 + 4x - \frac{3}{4};$$

$$14. y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Вариант 15

$$1. \sin^2 y = \operatorname{tg}^2 x + 3;$$

$$2. y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2;$$

$$3. y = C e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x};$$

$$4. y = \frac{2x}{1 - 3x^2};$$

$$5. y = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{3}{4} x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2;$$

6. $y = x^2 + \frac{C_1 x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{C_1}{2} \arcsin x + C_2;$
7. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cdot \ln |\operatorname{tg} x|;$
8. $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x};$
9. $y = e^{6x} (C_1 + C_2 x);$
10. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$
11. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x} + C_3 \cos 5x + C_4 \sin 5x;$
12. $y = \operatorname{arctg} 2x;$
13. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{15} e^{3x};$
14. $y = e^{-3x} (\cos 2x + \sin 2x) + 2x - 1;$
15. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 16

1. $y = C \sec x;$
2. $y = x e^{1+Cx};$
3. $y = C e^{-x^2} + (\sin x - x \cos x) e^{-x^2};$
4. $y = \ln x + \frac{C}{x};$
5. $y = -\frac{2}{3} \sin x + C_1 x - \frac{\sin^3 x}{9} + C_2;$
6. $y = \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2;$
7. $y = \operatorname{arctg}(3-3x);$
8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x};$
9. $y = e^{2.5x} (C_1 + C_2 x);$
10. $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$
11. $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2);$
12. $y = \left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x} + C_1 \right) e^x + \left(\ln \frac{1}{e^x (e^x + 1)} - \frac{1}{e^x} + C_2 \right) e^{2x};$
13. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{4}{17} \cos 2x - \frac{1}{17} \sin 2x;$
14. $y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} e^{2x};$
15. $\begin{cases} y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}, \\ x(t) = \frac{2C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-3t} (2t+1)}{4}. \end{cases}$

Вариант 17

1. $y^2 + y - x^2 = C;$
2. $x^3 + y^3 = Cxy;$
3. $y = \frac{e^x + C}{x};$
4. $y^3 = x + C e^{-x} - 1;$

5. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x - \ln |\cos x| + C_1 x + C_2$;
6. $y = 4\sqrt{x+1}$;
7. $y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2}\right) \operatorname{arctg} C_1 x - \frac{x}{C_1} + C_2$;
8. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$;
9. $y = e^{\frac{2}{3}x} (C_1 + C_2 x)$;
10. $y = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin \sqrt{8}x + C_3 \cos \sqrt{8}x$;
12. $y = e^x (\sqrt{4-x^2} + C_1 + C_2 x + x \arcsin \frac{x}{2})$;
13. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{24} \cos 7x + \frac{1}{16} \sin 7x$;
14. $y = -1 + \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{3} e^{-x}$;
15. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}, \\ y(t) = \frac{C_1}{2} e^{3t} - \frac{C_2}{4} e^{-3t}. \end{cases}$

Вариант 18

1. $y = C e^{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $x + y e^y = 2$;
3. $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;
4. $y(x^2 + Cx) = 1$;
5. $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$;
6. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos 2x - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1 x + C_2$;
7. $y = \frac{1}{1-8x}$;
8. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{8x}$;
9. $y = e^{0.4x} (C_1 + C_2 x)$;
10. $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
11. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;
12. $y = e^{-2x} \left(C_1 + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 + C_2 x \right)$;
13. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2 \cos x + \sin x$;
14. $y = 2 \cos x - \sin x + 2e^x$;

15. $\begin{cases} x(t) = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = \frac{e^{2t} ((-C_1 - C_2) \cos t + (C_1 - C_2) \sin t)}{2}. \end{cases}$

Вариант 19

1. $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$;

2. $y(y-2x)^3 = C(x-y)^2$;

3. $y = e^x(x+1)^n$;

4. $y^2 = \sin x - \cos x + Ce^{-x}$;

5. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1x + C_2$;

6. $y = C_1x - C_1^2 \ln|x+C_1| + C_2$;

7. $y = \frac{x+1}{x}$;

8. $y = C_1e^x + C_2e^{8x}$;

9. $y = e^{-8x}(C_1 + C_2x)$;

10. $y = e^{-4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;

11. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$;

12. $y = e^{-x}(C_1 - \sqrt{1+x^2} + C_2x + x \ln|x + \sqrt{1+x^2}|)$;

13. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x - \frac{1}{5}xe^{-4x}$;

14. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$;

15.
$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{7t}, \\ y(t) = -C_1e^t + \frac{1}{2}C_2e^{7t}. \end{cases}$$

Вариант 20

1. $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2\ln(1+y) - \frac{(y-1)^2}{2} = C$;

2. $y^3 = 3x^3(\ln x + 9)$;

3. $y = 2x + 3\sqrt{1+x^2}$;

4. $y = \frac{1}{C\sqrt{1-x^2} - 1}$;

5. $y = -\ln|x| + x^4 + C_1x + C_2$;

6. $y = -\frac{x}{C_1} - \frac{1+C_1^2}{C_1^2} \ln|1-C_1x| + C_2$;

7. $y = e^x$;

8. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{9x}$;

9. $y = e^{\frac{3}{4}x}(C_1 + C_2x)$;

10. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;

11. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$;

12. $y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$;

13. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$;

14. $y = e^{-x}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}x^2 - x$;

15.
$$\begin{cases} x(t) = -2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t}, \\ y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}. \end{cases}$$

Вариант 21

1. $y = \sin x$;
2. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$;
3. $y = x \ln x + \frac{C}{x}$;
4. $x^2 = \frac{1}{y - Cy^2}$;
5. $y = x(\ln|x| - 1) + C_1x + C_2$;
6. $y = \pm \left(\frac{x}{C_1} \sqrt{C_1^2 - x^2} + \frac{C_1^2}{2} \arcsin \frac{x}{C_1} \right) + C_2$;
7. $-(y+2)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} = x$;
8. $y = C_1e^x + C_2e^{7x}$;
9. $y = e^{8x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{-5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
11. $y = C_1e^x + C_2 \cos \sqrt{5}x + C_3 \sin \sqrt{5}x$;
12. $y = \left(C_1 - \frac{1}{2} \ln|2e^x + 1| \right) e^x + (x - \ln|2e^x + 1| + C_2) e^{2x}$;
13. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{16} e^{2x}$;
14. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$;
15. $\begin{cases} x(t) = e^{-3t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t), \\ y(t) = e^{-3t}((2C_1 + 4C_2) \cos 4t + (2C_2 - 4C_1) \sin 4t). \end{cases}$

Вариант 22

1. $\frac{C(x+1)}{y-1} = e^{\frac{y^2 - x^2}{2} + y + x}$;
2. $y = xe^{1-x}$;
3. $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$;
4. $y = \frac{1}{C\sqrt{1-x^2} - 1}$;
5. $y = \ln|\sin x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$;
6. $y = C_1 \ln|x| + C_2$;
7. $y = 2e^x$;
8. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$;
9. $y = e^{\frac{1}{4}x}(C_1 + C_2x)$;
10. $y = e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$;
11. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{\frac{7}{3}}x} + C_4e^{-\sqrt{\frac{7}{3}}x}$;
12. $y = \ln|2 + e^x| + C_1 + (C_2 - e^x + 2 \ln|e^x + 2|)e^{-x}$;
13. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$;

$$14. y = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{36};$$

$$15. \begin{cases} x(t) = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y(t) = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$$

Вариант 23

$$1. y = \ln \frac{1}{C - e^x};$$

$$9. y = e^{-\frac{1}{5}x} (C_1 + C_2 x);$$

$$2. \sin \frac{y}{x} = Cx;$$

$$10. y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2};$$

$$3. y = (x+1)^2 (e^x + C);$$

$$11. y = C_1 e^{-5x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x;$$

$$4. x^2 = C e^{\sin y} - 2(\sin y + 1);$$

$$12. y = C_1 + \ln(1 + e^{3x}) + (C_2 - e^{3x} + \ln(1 + e^{3x}))e^{-3x};$$

$$5. y = -\frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{9} \sin^3 x + C_1 x + C_2;$$

$$13. y = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + 2;$$

$$6. y = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1^2 + 1}{C_1^2} \ln|1 + C_1 x| + C_2;$$

$$14. y = \frac{e^x}{8} + \frac{11}{4} e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x};$$

$$7. y = x + 1;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

$$8. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x};$$

Вариант 24

$$1. y - a = \frac{Cx}{ax + 1};$$

$$6. y = \frac{\ln^2 |C_1 x|}{2} + C_2;$$

$$2. y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2;$$

$$7. y = x + 1;$$

$$3. y = C e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x};$$

$$8. y = C_1 + C_2 e^{-\frac{4}{5}x};$$

$$4. y = e^{-2x^2} \left(C + \frac{1}{2} x^2 \right)^2;$$

$$9. y = e^{-\frac{2}{3}x} (C_1 + C_2 x);$$

$$5. y = \frac{x^3}{12} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x -$$

$$10. y = e^{-x} (C_1 \cos 2\sqrt{2}x + C_2 \sin 2\sqrt{2}x);$$

$$-\frac{1}{16} \sin 2x + C_3;$$

$$11. y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2);$$

$$12. y = (C_1 - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5} + 2\sqrt{(x+1)^3})e^{-x} + (C_2 + 2(x+1)^{\frac{3}{2}})xe^{-x};$$

$$13. y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8};$$

$$14. y = e^x - \frac{3}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{3}{4}\sin 2x;$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

Вариант 25

$$1. \frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} + x = \ln \left| \frac{C(x+1)}{y-1} \right|;$$

$$2. xe^x = C;$$

$$3. y = \sin x;$$

$$4. y = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}};$$

$$5. y = e^{-x}(x+2) + C_1x + C_2;$$

$$6. y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1x + C_2;$$

$$7. y = \frac{1}{1-8x};$$

$$8. y = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-\frac{4}{5}x};$$

$$9. y = e^{-\frac{4}{3}x}(C_1 + C_2x);$$

$$10. y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$11. y = C_1 + C_2x + C_3 \cos \frac{2}{3}x + C_4 \sin \frac{2}{3}x;$$

$$12. y = C_1 + C_2e^x - \cos e^x;$$

$$13. y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3 + 3x^2 + 6x;$$

$$14. y = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{3x};$$

$$15. \begin{cases} x(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{3C_1e^{-4t} + C_2e^{-2t}}{3}. \end{cases}$$

2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

При розв'язанні завдань з фізико-хімічним змістом можна рекомендувати таку послідовність дій:

1. Встановити, яким законам підпорядковується даний процес.
2. Вирішити, що вибрати за незалежну змінну (наприклад, час t) і що за шукану функцію (наприклад, $x = x(t)$).
3. Виходячи з умов завдання визначити початкові умови (наприклад, $x_0 = x(t_0)$).
4. Відобразити всі наявні в задачі величини через t, x, x' , використовуючи при цьому фізичний зміст похідної як швидкості зміни змінної x в досліджуваному процесі.
5. Виходячи з умов завдання та на підставі фізичного закону, якому підпорядковується даний процес, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. За початковими умовами знайти частинний розв'язок.

При розв'язанні великої кількості фізико-хімічних задач слід знати, що швидкість зміни змінної величини пропорційна значенням цієї змінної в першій степені. Такі процеси називаються процесами першого порядку і описуються рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

У разі хімічної реакції величини, що входять до неї, означають:

x – кількість речовини в одиниці об'єму,

k – постійну величину при заданій температурі (стала швидкості реакції),

t – час.

До таких процесів слід віднести радіоактивний розпад, зміна концентрації розчину, хімічну реакцію, що протікає відповідно до стехіометричного рівняння типу $A \rightarrow B$, закон охолодження тіла та ін.

Задача 1. Відомо, що кількість радіоактивної речовини, яка розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в

розглянутий момент. За 30 днів розпалося 50 % первісної кількості речовини. Через скільки часу залишиться 1 % первісної кількості речовини?

Розв'язання. Кількість речовини, що розпадається за одиницю часу є швидкість розпаду цієї речовини. За умовою задачі

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

де x – кількість радіоактивної речовини. У початковий момент було x_0 речовини. Тоді $x = Ce^{-kt}$, значення постійної інтегрування C при $t = 0$ знаходимо з умови $x = x_0$ і $x = x_0 e^{kt}$. Знайдемо коефіцієнт пропорційності. Через 30 днів залишилася половина початкової кількості, тобто:

$$x = \frac{x_0}{2}; \quad \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-30k}; \quad \frac{1}{2} = e^{-30k};$$

$$\ln \frac{1}{2} = -30k; \quad k = + \frac{\ln 2}{30}.$$

Необхідно знайти час, коли залишиться 1 % первісної кількості речовини:

$$\frac{x}{x_0} = 0,01 \text{ (1\%)}; \quad 0,01 = e^{\frac{-\ln 2}{30}t}; \quad t = \frac{-30 \ln 0,01}{\ln 2};$$

$$t \approx \frac{195}{38} \text{ (днів)}.$$

Відповідь: $t \approx \frac{195}{38}$ (днів).

Задача 2. В резервуарі є 100 л розчину, що містить 5 кг розчиненої речовини (солі). У нього надходить чиста вода зі швидкістю 30 л/хв. Одночасно з цього резервуара з тією ж швидкістю видаляється розчин. Перемішування забезпечує однакову концентрацію солі у всьому резервуарі. Скільки солі залишиться в резервуарі до моменту часу t ?

Розв'язання. Виберемо в якості аргументу час t і позначимо через $x(t)$ кількість солі в резервуарі в момент часу t . Розглянемо проміжок часу Δt і знайдемо зміну кількості солі в резервуарі за проміжок часу Δt .

Зміна кількості солі за час від t до $t + \Delta t$, тобто $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$, дорівнює різниці кількості солі, яка надійшла (прихід) і кількості видаленої солі у розчині (витрата). В даному випадку кількість солі, яка надходить дорівнює нулю, так як в резервуар надходить чиста вода, тобто прихід дорівнює нулю.

Витрата: $x(t) = (\text{швидкість витікання розчину}) \times (\text{концентрацію}) \times (\text{час})$. Концентрація солі в видаленому розчині дорівнює $\frac{x}{V}$,

де V – об'єм розчину, що дорівнює 100 л,

$x(t)$ – загальна кількість солі в момент часу t .

Отже, $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) = -0,3x(t)\Delta t$. Звідси випливає, що

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -0,3x.$$

Обчислимо границю при $\Delta t \rightarrow 0$, та отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -0,3x.$$

Розв'яжемо це рівняння, та скористаємось початковими умовами. В результаті чого отримаємо: $x(t) = 5e^{-0,3t}$.

Відповідь: $x(t) = 5e^{-0,3t}$.

Задача 3. За який час тіло, нагріте до 100°C , охолоне до 25°C в кімнаті з температурою 20°C , якщо до 60°C воно охолонує за 10 хв?

Розв'язання. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{cp}), \quad \frac{dT}{dt} = k(T - 20), \quad \frac{dT}{T - 20} = kdT,$$

$$\ln|T - 20| = kt + \ln C, \quad T - 20 = e^{kt} + \ln C, \quad T = 20 + Ce^{kt}.$$

$$100 - 20 = Ce^0, \quad C = 80, \quad T = 20 + 80e^{kt},$$

$$60 - 20 = 80e^{10k}, \quad e^{10k} = \frac{1}{2}, \quad 10k = \ln \frac{1}{2},$$

$$10k = -\ln 2, \quad k = -\frac{\ln 2}{10}.$$

$$T = 20 + 80e^{-\frac{t \ln 2}{10}}, \quad 25^\circ = 20^\circ + 80e^{-\frac{t \ln 2}{10}}.$$

$$e^{-\frac{t \ln 2}{10}} = \frac{1}{16}; \quad -\frac{t \ln 2}{10} = \ln 16; \quad t = \frac{10}{\ln 2} \ln 16;$$

$$t = 10 \cdot 4 = 40.$$

Відповідь: $t = 40$.

Задача 4. Отримати рівняння хімічної реакції першого порядку і визначити час, необхідний для того, щоб концентрація $x_{A_0} = 0,98 \frac{\text{КМОЛЬ}}{\text{М}^3}$ знизилася до $x = 0,14 \frac{\text{КМОЛЬ}}{\text{М}^3}$, якщо стала швидкості цієї реакції дорівнює $k = 0,42$.

Розв'язання. При хімічній реакції першого порядку, тобто реакції, що протікає відповідно до рівняння $A \rightarrow R$, його швидкість пропорційна кількості речовини, що ще не прореагувала. Нехай x_{A_0} – початкова кількість речовини A , x_A – кількість речовини, що ще не прореагувала на момент часу t . Оскільки об'єм постійний, x_A є концентрацією речовини, що реагує в момент часу t . Очевидно, швидкість реакції є $\frac{dx}{dt}$ і диферен-

ціальне рівняння реакції має вигляд $\frac{dx_A}{dt} = -kx_A$.

Знак « $-$ » вказує на те, що x_A зі зростанням t зменшується. У рівнянні реакції розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\int \frac{dx_A}{x_A} = -k \int dt, \quad \ln x_A = -kt + C.$$

Сталу C в рівнянні визначасмо, використовуючи умову: в початковий момент часу $t = 0$ кількість речовини дорівнює x_{A_0} .

$$C = kt_0 + \ln x_{A_0}, \quad t = 0, C = \ln x_{A_0},$$

з урахуванням чого рівняння реакції прийме вигляд:

$$\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = -kt \Rightarrow -\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = kt$$

$$\text{або } \int_{x_{A_0}}^{x_A} \frac{dx_A}{x_A} = -k \int_0^t dt \Rightarrow -\ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = kt,$$

$$t = -\frac{1}{k} \ln \frac{x_A}{x_{A_0}} = -\frac{1}{0,42} \ln \frac{0,14}{0,98},$$

$$t = -\frac{1}{0,42} \ln \frac{0,14}{0,98} \approx 5 \text{ с.}$$

Відповідь: $t \approx 5 \text{ с.}$

При розв'язанні завдань зустрічаються хімічні реакції типу $aA + bB \rightarrow rR + dD$, де A, B – реагенти, R, D – продукти, a, b, r, d – стехіометричні коефіцієнти. Такі процеси називаються процесами другого порядку. Слід знати, що швидкість хімічної реакції такого типу пропорційна добутку концентрацій реагентів у степенях, що дорівнюють стехіометричним коефіцієнтам, $V = k \cdot C_A^a \cdot C_B^b$, де k – стала швидкості.

В окремому випадку, коли концентрації вихідних речовин однакові, швидкість пропорційна квадрату концентрації однієї з реагуючих речовин:

$$V = k \cdot C_A^2.$$

Задача 5. Реакція між речовинами A і B протікає за бімолекулярним законом $A + B \rightarrow R$. Стала швидкості дорівнює $0,025 \text{ м}^3/\text{кмоль} \cdot \text{с}$. Концентрація вихідних реагентів $C_{B_0} = 1,8 \text{ кмоль/м}^3$, $C_{A_0} = 1,5 \text{ кмоль/м}^3$. Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація реагентів знизилася до $C_{B_{\text{кон}}} = 0,675 \text{ кмоль/м}^3$, $C_{A_{\text{кон}}} = 0,375 \text{ кмоль/м}^3$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння реакції другого порядку. Швидкість хімічної реакції прямо пропорційна концентрації вихідних речовин. Тоді для реакції $A + B \rightarrow R$ в будь-який момент часу концентрації вихідних речовин відповідно рівні C_A, C_B , а диференціальне рівняння швидкості прийме вигляд:

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A C_B.$$

Рівняння містить дві невідомі C_A і C_B , а так як загальне число еквівалентів обох речовин не зміниться в реакції, тобто зберігається матеріальний баланс, то:

$$C_{A_0} = C_A + C_R \Rightarrow C_R = C_{A_0} - C_A;$$

$$C_{B_0} = C_B + C_R \Rightarrow C_B = C_{B_0} - C_R.$$

При цьому права частина отриманого диференціального рівняння прийме вигляд:

$$\begin{aligned} -kC_A C_B &= -kC_A (C_{B_0} - C_R) = -kC_A [C_{B_0} - (C_{A_0} - C_A)] = \\ &= -kC_A [C_{B_0} - C_{A_0} + C_A] = -kC_A (M + C_A), \text{ де } M = C_{B_0} - C_{A_0}. \end{aligned}$$

Отже, $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A (M + C_A)$. Розділимо змінні:

$$-\frac{dC_A}{C_A (M + C_A)} = -kdt,$$

і проінтегруємо обидві частини: $-\int_{C_{A_0}}^{C_A} \frac{dC_A}{C_A (M + C_A)} = k \int_0^t dt$, отримаємо:

$$\frac{1}{M} \ln \frac{M + C_A}{C_A} \Big|_{C_{A_0}}^{C_A} = kt \Big|_0^t, \quad \frac{1}{M} \ln \frac{M + C_A}{C_A} = kt + \ln C$$

$$\text{або } \frac{1}{M} \ln \frac{C_{A_0} (M + C_A)}{C_A (M + C_{A_0})} = kt, \quad t = 0, \quad C = \frac{1}{M} \ln \frac{M + C_{A_0}}{C_{A_0}};$$

$$\frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}} \ln \frac{C_{A_0} (C_{B_0} - C_{A_0} + C_A)}{C_A (C_{B_0} - C_{A_0} + C_{A_0})} = kt; \quad \ln \frac{C_{A_0} C_B}{C_A C_{B_0}} = (C_{B_0} - C_{A_0}) kt.$$

Скористаємось початковими умовами:

$$\ln \frac{1,5 \cdot 0,675}{0,375 \cdot 1,8} = (1,8 - 1,5) \cdot 0,025 t,$$

$$t \approx 54,06 \text{ с.}$$

Відповідь: $t \approx 54,06 \text{ с.}$

Задача 6. Отримати рівняння хімічної реакції, що складається з двох реакцій першого порядку $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ (послідовна реакція), за умови, що відомі стали швидкості реакцій $x_{A_0}, x_{B_0}, x_{C_0}$, а також визначити концентрацію x_B в момент часу 120 с, якщо $x_{A_0} = 0,28 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$, $k_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{с}}$, $k_2 = 5,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{с}}$, $x_{B_0} = 0$, $x_{C_0} = 0$.

Розв'язання. Нехай x_A, x_B, x_C – відповідно концентрації речовин A, B, C .

Рівняння швидкості реакцій для речовини A :

$$\frac{dx_A}{dt} = -k_1 x_A. \quad (1)$$

Речовина B утворюється з речовини A , тому швидкість утворення речовини B пропорційна концентрації речовини A у відповідний момент часу t . Сама речовина B є джерелом речовини C і швидкість розпаду (зворотного процесу утворення) речовини B пропорційна його концентрації у відповідний момент часу. Ці два процеси протікають одночасно; швидкість зміни кількості B визначається рівнянням:

$$\frac{dx_B}{dt} = k_1 x_A - k_2 x_B. \quad (2)$$

Швидкість реакції утворення речовини C визначається концентрацією x_B , відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{dx_C}{dt} = k_2 x_B. \quad (3)$$

Для рівняння (1) маємо:

$$x_A = x_{A_0} e^{-k_1 t}. \quad (4)$$

Якщо формулу (4) використаємо у рівняння (1) і (2), то отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t}.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$x_B = U(t)V(t),$$

$$x'_B = U'(t)V(t) + U(t)V'(t),$$

$$U'V + UV' + k_2 UV = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$V' + k_2 V = 0,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -k_2 \int dt, \ln V = -k_2 t, V = e^{-k_2 t},$$

$$U' e^{-k_2 t} = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$dU = k_1 x_{A_0} e^{-(k_1 - k_2)t}, U = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} + C,$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} e^{-k_2 t} + C e^{-k_2 t},$$

при $t = 0, x_B = x_{B_0}$:

$$x_{B_0} = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} + C; C = x_{B_0} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t} =$$

(5)

$$= x_{B_0} e^{-k_2 t} + \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Зауважимо, що x_C легше визначити не з рівняння (3), а з рівнянь матеріального балансу (4) і (5).

Рівняння матеріального балансу має вигляд:

$$x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} = x_A + x_B + x_C; \text{ звідси}$$

$$x_C = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_A - x_B = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_{A_0} e^{-k_1 t} - x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Отримавши рівняння послідовної хімічної реакції, визначимо з рівняння (5) концентрацію x_B в заданий момент часу при заданих початкових умовах:

$$x = 0 \cdot e^{-5,5 \cdot 10^{-3} \cdot 120} + \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,28 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}}{5,5 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3}} (e^{-2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 120} - e^{-5,5 \cdot 10^{-3} \cdot 120}) \approx \approx 0,11 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь: $x \approx 0,11 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}.$

Задача 7. Посудина, стінки якої утворюють деяку поверхню обертання з вертикальною віссю, наповнена рідиною до висоти h . Нехай у дні посудини зроблено отвір з площею f , через який рідина витікає з посудини. Потрібно визначити час, необхідний для того, щоб рідина опустилася до заданого рівня або витекла повністю. За умови, що протягом всього процесу не відбувається припливу рідини в посудину і що різницею тиску повітря в поверхні і у вихідного отвору можна знехтувати, визначити час, який знадобиться для того, щоб рівень рідини в циліндричній посудині знизився внаслідок витікання рідини на 0,6 м, якщо діаметр циліндричної посудини 3 м, отвір у дні посудини має діаметр 57 мм, посудина, наповнена рідиною до 1,8 м. Визначити, через скільки часу витече вся вода з посудини.

Розв'язання. Кількість рідини dQ , що випливає за час $d\tau$ зі швидкістю ω_1 через отвір, очевидно, дорівнює $f\omega_1 d\tau$. Рівень рідини,

поверхня F якої протягом часу $d\tau$ буде вважатися незмінною, знизиться за цей час з деякою швидкістю ω на висоту $\omega d\tau$, а отже, обсяг рідини в посудині зменшиться на величину $F\omega d\tau$. Ця величина повинна дорівнювати величині dQ . Звідси отримуємо:

$$dQ = f\omega d\tau = F\omega d\tau \quad (6)$$

$$\text{або } f\omega_1 = F\omega. \quad (7)$$

Згідно із законом, швидкість ω_1 витікання рідини з отвору з площею поперечного перерізу f дорівнює швидкості, яку набуває вільно падаюче тіло, пройшовши відстань, рівну висоті стовпа рідини над отвором.

Введемо тепер прямокутну систему координат, взявши за вісь Ox вісь посудини, а за вісь Oy будь-яку перпендикулярну до неї пряму, що лежить в площині, з якою співпадала поверхня рідини на початку процесу (в момент $\tau = 0$). Вісь Ox направимо вертикально вниз. Тоді, згідно з вищевказаним законом ми отримаємо для швидкості витікання ω_1 з отвору в момент τ наступний вираз $\omega_1 = \sqrt{2g(h-x)}$,

де g – прискорення сили тяжіння;

h – початкова висота стовпа рідини (при $\tau = 0$);

x – рівень в момент τ .

Підставляючи значення ω_1 у формулу (7), отримаємо вираз для швидкості ω падіння рівня в момент τ :

$$\omega = \frac{f}{F} \sqrt{2g(h-x)} \quad (8)$$

Якщо посудина має форму вертикального циліндра або призми, то F постійна: якщо ж посудина являє собою тіло обертання, твірна якого має рівняння $y = f(x)$ (Рисунок 2.1), то $F = \pi y^2$.

Підставляючи $\frac{dx}{d\tau}$ в рівняння (8) замість ω_1 , отримаємо:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{f}{F} \sqrt{2g(h-x)} \text{ або } d\tau = \frac{1}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{Fdx}{\sqrt{h-x}}.$$

Розв'язуючи рівняння, маємо:

$$\tau = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{h-x}}; \quad \tau = -\frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h-x} + C.$$

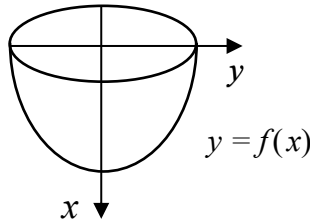


Рисунок 2.1

Скористаємось початковими умовами: в початковий момент закінчення зниження рівня рідини дорівнює нулю. Значить, якщо $\tau = 0$, то $x = 0$.

Отже:

$$C = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h},$$

$$\text{звідки } \tau = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h-x}).$$

Отримавши формулу, що дозволяє визначити час, необхідний для опускання рідини до заданого рівня, підставимо в неї дані задачі і визначимо час, необхідний для того, щоб рівень рідини знизився на 0,6 м:

$$F_{\text{нос}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 9^2}{4} = 53,6 \text{ м}^3;$$

$$f_{\text{оме}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,057^2}{4} = 0,003;$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; \quad h = 1,8 \text{ м}; \quad x = 0,6 \text{ м};$$

$$\tau = \frac{53,6 \cdot 1,4}{0,003 \cdot \sqrt{9,8}} (\sqrt{1,8} - \sqrt{1,2}) \approx 26 \text{ хв.}$$

Для визначення часу, необхідного для того, щоб вся рідина витекла з посудини $x = h$, отримуємо формулу:

$$\tau = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h},$$

$$\tau = \frac{53,6 \cdot 1,4}{0,003 \cdot \sqrt{9,8}}\sqrt{1,8} = 169 \text{ хв.}$$

Відповідь: $\tau = 169$ хв.

Задача 8. Два пункти розташовані вертикально один над іншим на висотах h_1 і h_2 , $h_2 > h_1$ над рівнем моря. Нехай барометричні тиски в цих пунктах дорівнюють відповідно b_1 і b_2 мм рт. ст. Знайти залежність між різницею висот $h_2 - h_1$, і барометричними тисками на цих висотах, якщо стовп повітря між обома точками має всюди однакову температуру 0° і позбавлений водяних парів (змінюю прискорення сили ваги з висотою нехтуємо).

Розв'язання. Тиск, вироблений газом, пропорційний щільності газу. Позначимо через p тиск (кг) повітря на горизонтальну площину в 1 м^2 розташовану на висоті h над рівнем моря, а через $p+dp$ – тиск на таку ж площину на висоті $h+dh$. Різниця цих тисків dp дорівнює вазі стовпа повітря з висотою dh який знаходиться між площинами. Тому, якщо γ є маса повітря на висоті h , то ми будемо мати:

$$dp = -\gamma dh. \quad (9)$$

Якщо γ_0 позначає масу повітря при тиску p_0 , то $p : p_0 = \gamma : \gamma_0$;

$\gamma = \frac{p\gamma_0}{p_0}$. Підставляючи значення γ в рівняння (9), отримаємо:

$$dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \cdot \frac{dp}{p}.$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\int dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \int \frac{dp}{p},$$

$$h = -\frac{P_0}{\gamma_0} \ln |p| + \ln C.$$

Нехай p_1 і p_2 – тиск на висотах h_1 і h_2 :

$$\int_{h_1}^{h_2} dh = -\frac{P_0}{\gamma_0} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{P}.$$

Одержимо:

$$h_2 - h_1 = -\frac{P_0}{\gamma_0} (\ln p_2 - \ln p_1) = \frac{P_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так як показання барометра пропорційні тиску повітря, то замість $\frac{p_1}{p_2}$ можна підставити $\frac{b_1}{b_2}$.

Таким чином:

$$h_2 - h_1 = \frac{P_0}{\gamma_0} \ln \frac{b_1}{b_2},$$

$$\text{або } h_2 - h_1 = \frac{P_0}{\gamma_0} 2,303 \ln \frac{b_1}{b_2}.$$

Отримана залежність дозволяє наближено обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилося на 1 мм, якщо $b_1 = 760$ мм:

$$h_2 - h_1 = \frac{1033}{1,293} \ln \frac{760}{759} \approx 10,5 \text{ м.}$$

Відповідь: $h_2 - h_1 \approx 10,5$ м.

Задача 9. Лівий кінець стрижня, довжина якого дорівнює L підтримується при постійній температурі T_1 , а правий – при постійній температурі $T_2 < T_1$.

Стрижень зроблений з металу з теплопровідністю λ у вигляді бруска малої товщини з периметром поперечного перерізу P м і площею перерізу A м². Коефіцієнт тепловіддачі від поверхні стрижня до навколишнього середовища α може бути прийнятий постійним.

Температура навколишнього середовища дорівнює T_s . Потрібно встановити зв'язок між температурою стрижня в будь-якій точці і відстанню цієї точки від гарячого кінця, за умови, що стрижень досить тонкий; якщо теплопровідність його велика, то ми можемо без суттєвої помилки знехтувати температурними градієнтами в напрямках, перпендикулярних до осі стрижня, і прийняти постійну температуру в кожній точці поперечного перерізу, перпендикулярного осі Ox .

Розв'язання. Дослідимо процес розповсюдження тепла в елементарному відрізку довжиною dx на відстані x від того кінця стрижня, температура якого t_1 (Рисунок 2.2).

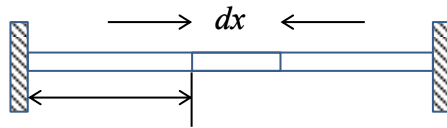


Рисунок 2.2

Кількість тепла, що проходить за час $d\tau$ через перетин стрижня, що знаходиться на відстані x від початку стрижня, згідно теорії теплопередачі, буде дорівнювати:

$$-\lambda A \frac{dT}{dx} d\tau.$$

Кількість тепла, що пройшло за час $d\tau$ через поперечний переріз, що знаходиться на відстані $x + dx$ від початку, буде:

$$-\lambda A \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) d\tau.$$

Ділянка стрижня, розташована між перерізами, віддаленими від початку на відстанях x і $x + dx$, внаслідок теплопровідності набуває за час $d\tau$ кількість тепла, що дорівнює різниці вказаних кількостей, тобто:

$$\lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau.$$

За той же час втрата тепла від цієї ділянки в навколишнє середовище буде становити:

$$\alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Але так як досліджуваний нами процес є стаціонарним, то

$$\lambda A \frac{d^2 T}{dx^2} dx d\tau = \alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Остаточно приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\lambda A} (T - T_s). \quad (10)$$

Нехай $\frac{\alpha P}{\lambda A} = a^2$. Зауважимо, що при $T_s = const$:

$$\begin{aligned} \frac{d(T - T_s)}{dx} &= \frac{dT}{dx}; \\ \frac{d^2(T - T_s)}{dx^2} &= \frac{d^2 T}{dx^2}. \end{aligned}$$

Тому рівняння може бути переписано у наступному вигляді:

$$\frac{d^2(T - T_s)}{dx^2} - a^2(T - T_s) = 0.$$

Це рівняння має постійні коефіцієнти. Його загальний розв'язок буде:

$$T - T_s = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \quad (11)$$

При розв'язанні прикладних задач для знаходження довільних сталих можуть бути використані граничні умови: в початковій точці стрижня, тобто при $x = 0$, $T = T_1$ та у кінцевій, тобто при $x = \alpha$, $T = T_2$.

Тоді з рівняння (11) знаходимо:

$$T_1 - T_s = C_1 + C_2; T_2 - T_s = C_1 e^{aL} + C_2 e^{-aL}. \quad (12)$$

З цих рівнянь можна виразити C_1 і C_2 через відомі величини.

Розв'язуючи рівняння (12) щодо C_1 і C_2 отримаємо:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_s) - (T_1 - T_s)e^{-aL}}{2 \operatorname{sh} aL},$$

$$C_2 = \frac{(T_1 - T_s)e^{aL} - (T_2 - T_s)}{2 \operatorname{sh} aL}.$$

Підстановка значень C_1 і C_2 в рівняння (12) дає:

$$T - T_s = \frac{(T_2 - T_s) \operatorname{sh} ax + (T_1 - T_s) \operatorname{sh} a(L - x)}{\operatorname{sh} aL}.$$

Отримавши рівняння, що встановлює залежність між температурою T і координатою x точки нагрітого стрижня, визначимо, зокрема, температуру стрижня завдовжки 1 м в точці, віддаленій від лівого кінця на відстань 0,4 м, за умови:

$$T_1 = 0, \quad \alpha = 10 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{год} \cdot \text{град}, \quad \frac{A}{P} = 72,5, \quad \lambda = 330 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{град}}.$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha P}{xA}} = 1,48.$$

$$T = 47,9 \cdot \operatorname{sh} 1,48 \cdot 0,4 + 95,8 \cdot \operatorname{sh} 1,48(1 - 0,4),$$

$$T = 126,7^\circ.$$

Відповідь: $T = 126,7^\circ$.

У запропонованих методичних вказівках наведені деякі задачі хімічної технології, загальний розв'язок яких призводить нас до рівнянь з відокремлюваними змінними, до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, до лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Слід зазначити, що при розв'язанні задач хімічної технології ми зустрічаємося з усіма типами диференціальних рівнянь, розглянутими нами вище.

Так, з однорідним диференціальним рівнянням першого порядку ми зустрічаємося при розв'язанні задач: процес хлорування органічних сполук, витрата реагенту при максимальному виході цільового продукту в складних реакціях; з неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв'язанні задач: система оборотних реакцій, що протікають при постійному об'ємі, безперервний процес гідролізу твердого жиру в розпилювальній колонці; з диференціальними рівняннями другого порядку, що допускають зниження

порядку – рух рідини в капілярах; з лінійним неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв’язанні багатьох задач, зокрема, наприклад, при знаходженні закону руху частинки, що випадає в осад в рідині без початкової швидкості.

Розрахункове завдання 2

1. Відомо, що кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в розглянутий момент. Визначити час напіврозпаду радону, якщо його стала радіоактивності $K = 2,084 \cdot 10^{-6}$ (час вимірюється в секундах).

2. У баку знаходиться 100 л розчину, що містить 10 кг солі. У бак вливається вода зі швидкістю 5 л/хв і суміш витікає з неї з тією ж швидкістю. Концентрація приймається рівномірною. Скільки солі залишиться в баку через 1 годину?

3. Повітря, що наповнює посудину місткістю 3 л, містить 20 % кисню. Посудина має дві трубки. Через одну з них у посудину починають впускати чистий кисень, через інший витікає назовні стільки повітря, скільки притікає в посудину кисню. Яка кількість буде міститися в посудині після того, як через неї протече 10 л кисню?

4. Швидкість розпаду радіо пропорційна його кількості. Протягом року з кожного грама радіо розпадається 0,44 г. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радіо?

5. У резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожену хвилину надходить 30 л води і випливає 20 л суміші. Визначити, яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хв, припускаючи, що суміш миттєво перемішується.

6. Закон розпаду радіо полягає в тому, що швидкість розпаду пропорційна кількості радіо. Відомо, що половина його первісного запасу розпадається після закінчення 1600 років. Визначити кількість радіо, що не розпався, після закінчення 100 років, якщо початкова його кількість дорівнює 1 кг.

7. Посудина об'ємом 40 л містить повітря (80 % азоту і 20 % кисню). В посудину втікає кожену секунду 0,2 л азоту, який безперервно розмішують, і випливає така ж кількість суміші. Через який час в посудині буде 99 % азоту?

8. За який час тіло, нагріте до 100° , охолоне до 25° в кімнаті з $t = 20^\circ$, якщо до 60° воно охолоджується за 10 хв?

9. Для реакції першого порядку $A \rightarrow R$, стала швидкості якої $K = 0,38 \text{ хв}^{-1}$, визначити час, необхідний для того, щоб концентрація $C_{A_0} = 1,2 \text{ кмоль/м}^3$ знизилася до $C_A = 0,224 \text{ кмоль/м}^3$.

10. Якщо початкова кількість ферменту 1 г через годину стає рівною 1,2 м, то чому вона буде дорівнювати через 5 годин після початку бродіння, якщо вважати, що швидкість приросту ферменту пропорційна його наявній кількості?

11. Бімолекулярна реакція $A + R \rightarrow R$ протікає з сталою швидкості, що дорівнює $K = 1,85 \text{ л/моль} \cdot \text{с}$. Початкова концентрація $C_{A_0} + C_{B_0} = 0,075 \text{ моль/л}$. Визначити концентрації вихідних речовин через 45 хв.

12. Речовина A перетворюється за реакцією другого порядку. Стала швидкості дорівнює $0,12 \text{ м}^3/\text{кмоль} \cdot \text{с}$. Визначити концентрацію речовини A до моменту часу 40 с, якщо в початковий момент вона становила $0,8 \text{ кмоль/м}^3$.

13. Стала швидкості реакції другого порядку $2A \rightarrow R$ дорівнює $0,18 \text{ л/моль} \cdot \text{с}$. Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація речовини A , рівна $0,075 \text{ моль/л}$, знизилася до значення $0,0075 \text{ моль/л}$.

14. Рідкофазна реакція $A + R \rightarrow R + S$ протікає в ізотермічному режимі. Стала швидкості реакції дорівнює $11,42 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмоль} \cdot \text{с}$. Концентрація вихідних речовин $C_{A_0} = 1,4 \text{ кмоль/м}^3$, $C_{A_0} = C_{B_0}$. Визначити значення концентрації вихідних реагентів до моменту часу 4 хв.

15. Реакція між речовинами A і B протікає за бімолекулярним законом. Стала швидкості дорівнює $0,045 \text{ м}^3/\text{кмоль} \cdot \text{с}$. Визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація речовини A , рівна $1,25 \text{ кмоль/м}^3$, знизилася до $0,19 \text{ кмоль/м}^3$. Прийняти при цьому, що реагенти взяті в еквімолярних співвідношеннях.

16. Циліндрична посудина діаметром 1,8 м, що має в дні отвір 38 мм, наповнена водою до висоти 2,5 м. Скільки часу потрібно, щоб рівень води знизився на 0,9 м?

17. Циліндрична посудина діаметром 1,5 м, що має отвір у дні 29 мм, наповнена рідиною до висоти 1 м. Скільки часу потрібно, щоб рівень рідини знизився до 0,37 м?

18. Циліндрична посудина діаметром 2,5 м, що має в дні отвір 36 мм, наповнена водою до висоти 1,9 м. Скільки часу знадобиться для того, щоб рівень води знизився на 0,7 м?

19. Стали швидкості послідовної хімічної реакції першого порядку $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ рівні $K_1 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{с}}$; $K_2 = 1,8 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{с}}$. Визначити концентрацію X_B в момент часу $t = 90 \text{ с}$, якщо $X_{A_0} = 1,2 \text{ кмоль/м}^3$, $X_{B_0} = 0$, $X_{C_0} = 0$.

20. Обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилися на 2 мм. Початковий барометричний тиск $B_1 = 760 \text{ мм}$. Біля поверхні землі при температурі 0° числові значення $\rho_0 = 10333 \text{ кг/м}^2$, $\gamma_0 = 1,293 \text{ кг/м}^3$.

21. Обчислити висоту, на яку треба піднятися, щоб показання барометра змінилися на 10 мм. Початковий барометричний тиск $B_1 = 756 \text{ мм}$. Біля поверхні землі при температурі 0° числові значення $\rho_0 = 1033 \text{ кг/м}^2$, $\gamma_0 = 1,293 \text{ кг/м}^3$.

22. За який час тіло, нагріте до 140°C , охолоне до 35° в кімнаті з $T = 18^\circ$, якщо до 70° воно охолоджується за 15 хв?

23. Визначити температуру алюмінієвого стрижня прямокутного перерізу $a \times b = 15 \times 25 \text{ мм}$ в точці, віддаленій від лівого кінця на відстань 0,8 м, якщо температура лівого кінця $T_1 = 140^\circ\text{C}$, правого $T_2 = 70^\circ\text{C}$, $T_{\text{повітря}} = 20^\circ\text{C}$ коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 16 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, теплопровідність стрижня $\lambda = 203,5 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$.

24. Визначити температуру мідного стрижня квадратного перерізу $a \times a = 20 \times 20$ мм, довжиною 1,2 м на відстані 0,4 м, якщо температура лівого кінця $T_1 = 220$ °С, правого кінця $T_2 = 95$ °С, $T_{\text{повітря}} = 16$ °С, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 18,5$ Вт/м² · К, теплопровідність стрижня $\lambda = 203,5$ Вт/м · К.

25. Для реакції другого порядку $A + B \rightarrow R$ визначити час, необхідний для того, щоб початкова концентрація $C_{A_0} = 1,35$ моль/л знизилася до $C_A = 0,2$ моль/л, якщо стала швидкості $K = 0,3$ л/моль · с, початкова концентрація речовини $C_{B_0} = 1,8$ моль/л.

Самостійна робота №1

Зміст роботи

1. Для всіх завдань визначити та обґрунтувати тип диференціального рівняння та метод його розв'язання.
2. Знайти загальний або частинний розв'язок рівняння.

Варіант 1

1. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.
2. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$.
3. $y' + y = 3x$.

Варіант 2

1. $2xy^2 dx - y dy = yx^2 dy - 6x dx$.
2. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 0$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, $y(1) = 0,5$.

Варіант 3

1. $ye^{2x} dx + (1+e^{2x}) dy = 0$.
2. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.
3. $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$, $y(1) = \frac{e}{2}$.

Варіант 4

1. $3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \frac{dy}{\cos^2 x} = 0$.
2. $x \cos \frac{y}{x} (y \, dx + x \, dy) = y \sin \frac{y}{x} (x \, dy - y \, dx)$.
3. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x$.

Варіант 5

1. $\sqrt{x} \, dy = (\sqrt{1-x} + \sqrt{x}) \, dx$.
2. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, \quad y(e) = 1$.
3. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$.

Варіант 6

1. $y^2 e^x \, dx - (e^x + 2) \, dy = 0$.
2. $xy \, dy - y^2 \, dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} \, dx, \quad y(e) = 1$.
3. $y' - \frac{1}{x} y = \ln x, \quad y(1) = 5$.

Варіант 7

1. $y \sin x dx + (\cos x - 1) dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

2. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin x, y(\pi) = 0.$

Варіант 8

1. $6x dx - 2x^2 y dy = 6y dy - 3xy^2 dx.$

2. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{2}.$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x^3 + 2, y(1) = \frac{1}{3}.$

Варіант 9

1. $xy^2 dx - y dy = yx^2 dy - x dx.$

2. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2.$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x \operatorname{tg} x, y(\pi) = \pi.$

Вариант 10

1. $(e^x + 5)dy - y^2 e^x dx = 0$.
2. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 \sqrt{x^2 + 5}$, $y(2) = 36$.

Вариант 11

1. $y(2 + e^x)dy = e^x dx$.
2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = e^{x^3} x^3$, $y(1) = \frac{e}{3}$.

Вариант 12

1. $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)y' = y$, $y(0) = 3$.
2. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x$, $y(1) = 2$.

Вариант 13

1. $x\sqrt{x^2 + 1} dx - \sqrt{y} dx = 0$.
2. $(2x - y)y' = x + 2y$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = x \ln x$, $y(2) = 2$.

Варіант 14

1. $(1 - x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0$.

2. $3x^2y' = y^2 + 10xy + 10x^2$.

3. $y' - \frac{1}{x}y = e^x$, $y(1) = 2$.

Варіант 15

1. $2x^2ydy = (3 + y^2)dx$.

2. $(3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2$.

3. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = 0$.

Варіант 16

1. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xydy$.

2. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$.

3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 0$.

Вариант 17

1. $y^2 dy + \operatorname{ctg} x dx = y^3 \operatorname{ctg} x dx$.
2. $(xy' - y) \operatorname{ctg} \frac{y}{x} = x$.
3. $y' + y \cos x = \cos x$, $y(0) = 3$.

Вариант 18

1. $y \sin x dx + \cos x dy = \operatorname{ctg} x dy$.
2. $xy'(2y^2 + 4x^2) = 3y^3 + 8xy^2$.
3. $y'x \ln x - y = x^2 \ln^3 x$.

Вариант 19

1. $x dy = x^2 e^{-y} dx + 2 dy$.
2. $(2x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.
3. $y' + \frac{y}{x+1} + x^2 = 0$, $y(0) = 2$.

Вариант 20

1. $dy - 3x dy - \sqrt{y} dx = 0$.
2. $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$.
3. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{x-3}$, $y(4) = 2$.

Варіант 21

1. $2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0.$

2. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2).$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin^3 x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Варіант 22

1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = ydx.$

2. $y'x = 2y \ln \frac{2y}{x}.$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x \frac{\sin^3 x}{\cos x}, y(\pi) = \frac{\pi}{2}.$

Варіант 23

1. $x(dy - 2ydx) + xy^2dx = 0.$

2. $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{2y}{x}}.$

3. $y' - \frac{1}{x}y = x \frac{\sin x}{\cos^3 x}, y(\pi) = \frac{\pi}{2}.$

Вариант 24

1. $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$.
2. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin^2 x \cos^2 x$, $y(\pi) = 1$.

Вариант 25

1. $y(1 + e^x) dy = e^x dx$.
2. $\frac{xy' - y}{x + y} = \ln \frac{x + y}{x}$.
3. $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{(x-2)^2}$, $y(1) = 0$.

Самостійна робота №2

Зміст роботи

Лінійні однорідні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайти визначник Вронського для заданих систем функцій; встановити, чи утворюють функції фундаментальну систему рішень деякого однорідного рівняння.

2. Знаючи корені характеристичного рівняння, записати загальний розв'язок однорідного рівняння.

3. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

4. Знайти частинний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Варіант 1

1. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos 2x$. 2. $k_1 = 3 - 2i$, $k_2 = 3 + 2i$.

3. $y'' + 3y' = 0$. 4. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$.

Варіант 2

1. $y_1 = x^3$, $y_2 = e^x$. 2. $k_1 = +2i$, $k_2 = -2i$.

3. $y'' + 10y' + 25y = 0$. 4. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Варіант 3

1. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$. 2. $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

3. $y'' + 7y' + 6y = 0$. 4. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

Варіант 4

1. $y_1 = x^3$, $y_2 = x''$. 2. $k_1 = 3$, $k_2 = 5$.
3. $y'' - 2y' - 2y = 0$. 4. $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Варіант 5

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = x^2 e^x$. 2. $k_1 = 7 - 5i$, $k_2 = 7 + 5i$.
3. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. 4. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 6

1. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-3x}$. 2. $k_1 = 1 - 3i$, $k_2 = 1 + 3i$.
3. $9y'' - y' - 2y = 0$. 4. $y'' + y' = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Варіант 7

1. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. 2. $k_1 = 3 - 2i$, $k_2 = 3 + 2i$.
3. $y'' + 6y' + 9 = 0$. 4. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

Варіант 8

1. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 2x$. 2. $k_1 = \sqrt{3} + 5i$, $k_2 = \sqrt{3} - 5i$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$. 4. $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Варіант 9

1. $y_1 = x^2$, $y_2 = \cos x$. 2. $k_1 = 0$, $k_2 = 7$.
3. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. 4. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Варіант 10

1. $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$. 2. $k_1 = 9 - i$, $k_2 = 9 + i$.
3. $y'' + 18y' + 81y = 0$. 4. $y'' + 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Варіант 11

1. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{4x}$. 2. $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{17}{3}$.
3. $y'' - 6y' + 34y = 0$. 4. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$.

Варіант 12

1. $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$. 2. $k_1 = 3 + 9i$, $k_2 = 3 - 9i$.
3. $y'' + 3y = 0$. 4. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Варіант 13

1. $y_1 = xe^{-2x}$, $y_2 = e^{-2x}$. 2. $k_1 = \sqrt{13} - 2i$, $k_2 = \sqrt{13} + 2i$.
3. $y'' - 49y' = 0$. 4. $4y'' - 7y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Вариант 14

1. $y_1 = xe^x$, $y_2 = x^4$. 2. $k_1 = 3 + i\sqrt{11}$, $k_2 = 3 - i\sqrt{11}$.
3. $3y'' - 5y' + 2 = 0$. 4. $2y'' + 4y' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Вариант 15

1. $y_1 = x$, $y_2 = x^2e^{3x}$. 2. $k_1 = 10$, $k_2 = 3$.
3. $y'' - 17y' + 16y = 0$. 4. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Вариант 16

1. $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$. 2. $k_1 = 13 + 5i$, $k_2 = 13 - 5i$.
3. $3y'' + 6y' + 2y = 0$. 4. $9y'' + 25y = 0$, $y'(0) = y(0) = 0$.

Вариант 17

1. $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{3x}$. 2. $k_1 = 7 - 3i$, $k_2 = 7 + 3i$.
3. $3y'' - 5y' - 2y = 0$. 4. $3y'' + 7y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Вариант 18

1. $y_1 = x$, $y_2 = x^4$. 2. $k_1 = \sqrt{17}i$, $k_2 = -\sqrt{17}i$.
3. $7y'' + 11y' - 2y = 0$. 4. $2y'' - 3y' - 35y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

Варіант 19

1. $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = xe^{5x}$. 2. $k_1 = k_2 = \sqrt{10}$.
3. $4y'' - 17y' + 4y = 0$. 4. $y'' + 49y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{14}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{14}\right) = 2$.

Варіант 20

1. $y_1 = x^2$, $y_2 = x^6$. 2. $k_1 = \frac{5}{11} - i$, $k_2 = \frac{5}{11} + i$.
3. $y'' - 13y' + 22y = 0$. 4. $y'' + 4\pi^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2\pi$.

Варіант 21

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = x^3 e^x$. 2. $k_1 = 4 - 9i$, $k_2 = 4 + 9i$.
3. $y'' - 12y' + 32y = 0$. 4. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Варіант 22

1. $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$. 2. $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.
3. $y'' - 8y' + 15y = 0$. 4. $5y'' - 6y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Варіант 23

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{7x}$. 2. $k_1 = 3 - 17i$, $k_2 = 3 + 17i$.
3. $y'' - 27y' + 50y = 0$. 4. $y'' - 22y' + 121y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Вариант 24

1. $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$. 2. $k_1 = 12$, $k_2 = -13$.

3. $5y'' + 8y' + 14y = 0$. 4. $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Вариант 25

1. $y_1 = \sin 3x$, $y_2 = \cos 3x$. 2. $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{11}{13}$.

3. $2y'' - 7y' + 13y = 0$. 4. $7y'' + 6y' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Самостійна робота №3

Зміст роботи

Лінійні неоднорідні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих.
2. Визначити вид частинного розв'язку, якщо відомі корені його характеристичного рівняння на вигляд правої частини.
3. Знайти загальний та частинний розв'язок ЛНДР.
4. Розв'язати систему рівнянь.

Варіант 1

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$. 2. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.

3. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1. \end{cases}$$

Варіант 2

1. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$. 2. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, f(x) = (Ax + B)e^x$.

3. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Варіант 3

1. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$. 2. $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$, $f(x) = Ae^{-x}$.

3. $y'' + y' - 6y = -x^2 - \frac{29}{18}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z; \\ \frac{dz}{dt} = 6z. \end{cases}$$

Варіант 4

1. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$. 2. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

3. $y'' - 2y' + y = x^3$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 5

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$. 2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$$

Варіант 6

1. $y'' + y' = \operatorname{tg}^2 x$. 2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = \sin x + \cos x$.

3. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 2. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3. $y'' - 7y' = (x-1)^2$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$$

Варіант 8

1. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$. 2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, f(x) = ax^2 + bx + c$.

3. $4y'' - y = x^3 - 24x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z; \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$$

Варіант 9

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. 2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, f(x) = ae^{-x}$.

3. $y'' + 5y' - 14y = e^{2x}(2x^2 - 3x + 1)$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - z; \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

Вариант 10

1. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$. 2. $\lambda_1 = 3 - 4i$, $\lambda_2 = 3 + 4i$, $f(x) = e^{3x}(ax + b)$.

3. $y'' - y' = 6x^2 + 3x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y; \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 11

1. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$. 2. $\lambda_1 = 8 + 5i$, $\lambda_2 = 8 - 5i$, $f(x) = Ae^{8x}$.

3. $y'' - y' - y = (3x + 7)e^{2x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$$

Вариант 12

1. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

2. $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $f(x) = e^{x/4}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

3. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y; \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 13

1. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
2. $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 11, f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.
3. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 4x + 6y = 0; \\ \frac{dy}{dt} + 4x + 2y = 0. \end{cases}$$

Вариант 14

1. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
2. $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0, f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + k$.
3. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - e^x)e^{-2x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z; \\ \frac{dy}{dt} = -10y - z. \end{cases}$$

Вариант 15

1. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$. 2. $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 7, f(x) = A \sin 7x + B \cos 7x$.
3. $y'' - 5y' = e^{2x}(2x^2 - 3x - 1)$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$$

Вариант 16

1. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$. 2. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, f(x) = e^x (Ax^2 + Bx + c)$.

3. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

Вариант 17

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}$. 2. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$.

3. $y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{-x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y; \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

Вариант 18

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$. 2. $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 7, f(x) = Ax^2 + Bx + c$.

3. $y'' - y' = 5(x+2)^2$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y; \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$$

Варіант 19

1. $y'' - y' = \frac{1}{e^{-x} + 1}$. 2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$.

3. $y'' + y' = 49 - 24x^3$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 20

1. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$. 2. $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 9, f(x) = e^x (ax^2 + bx + c)$.

3. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x; \\ \frac{dy}{dt} = 3y + 2x. \end{cases}$$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

2. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7, f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

3. $y'' - y' = 3x^2 - 2x + 1$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y; \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$$

Вариант 22

1. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

2. $\lambda_1 = 5 - 9i$, $\lambda_2 = 5 + 9i$, $f(x) = e^{5x}$.

3. $y'' + y' = 12x + 6$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2y + 3x = 0; \\ \frac{dy}{dt} - 3y - 2x = 0. \end{cases}$$

Вариант 23

1. $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$. 2. $\lambda_1 = -7 + 11i$, $\lambda_2 = -7 - 11i$, $f(x) = Ae^{7x}$

3. $4y'' - y = x^3 - 24x$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0. \end{cases}$$

Вариант 24

1. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.

2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 11$, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

3. $y'' - 4y = (x^2 + x)e^{2x}$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - y = 0; \\ \frac{dy}{dt} - 3x - y = 0. \end{cases}$$

Варіант 25

1. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \sqrt{2x+1}$.

2. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -7, f(x) = e^{-3x} (ax^2 + bx + c)$.

3. $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$. 4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Таблиця похідних

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R, x > 0;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, x \in R;$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, x > 0;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

2. Основні правила диференціювання

Якщо $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – функції, що мають похідні, а C – стала, то:

$$(C)' = 0;$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-C \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$(f(U(x)))'_x = f'_U \cdot U'_x.$$

3. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

4. Основні властивості невизначеного інтегралу

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ за умови } F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \quad \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx;$$

$$\int c f(x)dx = c \int f(x)dx;$$

$\int f(u)du = F(u) + C$, C – стала, $u = u(x)$ – будь-яка функція, що має похідну за змінної x ;

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C; \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

5. Деякі тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha ; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha .$$

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Теорема Вієта:
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \end{cases}$$
 де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

вняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); & (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Кириллова Н.О., Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 432 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/items/227bd413-6a9c-4046-ba7b-b80aa642ccdd>

2. Диференціальні рівняння та їх застосування : навч.-метод. посіб. / Прищенко О.П., Черногор Т.Т. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – 88 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/items/a90441ad-af77-4757-bfea-3cd79618f194>

3. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Першина Ю.І., Прищенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/items/433e0f7b-6de9-4406-aa8e-f5823dace570>

4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н.О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2013. – 216 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/items/4d86b745-4f9c-427b-9be9-12b3f2ed4524>

5. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3 : Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/972/tevyashev_visha_matemat_3.pdf

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	5
1.1. Диференціальні рівняння першого порядку	5
1.1.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	7
1.1.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку	10
1.1.3. Лінійні диференціальні рівняння	14
1.1.4. Рівняння Бернуллі	21
1.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку	25
1.2.1. Диференціальне рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$	25
1.2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які не містять шукану функцію	27
1.2.3. Диференціальні рівняння вищих порядків, що не містять незалежну змінну	32
1.3. Елементи загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь	36
1.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	39
1.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	47
1.5.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду	47
1.5.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та неспеціальною правою частиною. Метод варіації довільних сталих	54

1.6. Інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь	
методом виключення	61
Розрахункове завдання 1	65
Відповіді	77
2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ	91
Розрахункове завдання 2	108
Самостійна робота №1 ДР першого порядку	112
Самостійна робота №2 ЛОДР	120
Самостійна робота №3 ЛНДР	126
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ	135
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	139

Навчальне видання

ПРИЩЕНКО Ольга Петрівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

**ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ**

Навчальний посібник
для студентів хімічних спеціальностей

Відповідальна за випуск проф. Першина Ю. І.
Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н. О.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 20

Підп. до друку 2025 р.

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 5,3.

Видавничий центр НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання